21世纪高等医学院校教材

主编 张世强

医学高等数学



科学出版社

(R-0673.0101)

责任编辑：张　好　单靖华
封面设计：王　浩

科学出版社　医学出版中心
http://medsp.yeah.net
E-mail:med_sp@sohu.com



ISBN 7-03-009178-7
9 787030 091789 >

ISBN 7-03-009178-7/R · 673
定价：32.00 元

21世纪高等医学院校教材

医学高等数学

主编　张世强

科学出版社

2001

内 容 简 介

本书详细阐述了函数与极限、导数与微分、导数与微分的应用、不定积分、定积分、多元函数微积分、微分方程、无穷级数、概率论基础和线性代数初步等方面的内容，并在每章后附习题解答与提示。本书起点低、跨度大、主干清晰、层次分明、说理清楚、通俗易懂、便于应用，适合作为医学院校各专业本科及专科学生教材，也可作为医学院校研究生教材及医学工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

医学高等数学/张世强主编.-北京：科学出版社，2001.8
ISBN 7-03-009178-7

Ⅰ.医… Ⅱ.张… Ⅲ.医用数学：高等数学 Ⅳ.R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 04027 号

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
新 蕾 印 刷 厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

2001 年 8 月第 一 版　　开本:850×1168 1/16
2001 年 8 月第一次印刷　　印张:23
印数:1—5 000　　字数:476 000

定价:32.00 元

《医学高等数学》编写人员名单

主　　编　张世强

副主编　姚　莉　罗亚玲

编　　委　陆洪娣　罗亚玲

姚　莉　张世强

前　　言

从培养21世纪医学人才的角度看，进一步拓宽医学院校大学生的知识面，增强其创新能力是非常必要的。其中提高医学院校大学生的数学素质应引起重视。在美、英、法等发达国家，理工科大学二年级的优秀生才能进入医学院校；在国内，北京大学医学院从1950年开始即把高等数学定为医学院校学生的必修课。

为了提高医学院校大学生的数学素质，在多年教学经验的基础上，我们编写了这本“医学高等数学”教材。在教材结构上，我们大胆创新，对高等数学的内容进行了大量的精选、优化及浓缩工作。并结合我国国情，将编书的指导思想定为：起点低，跨度大。起点低是指注重内容的实用性，适当兼顾理论体系。对于医药学大学生来说，学习内容的实用性显得更加重要，因此，在选择题材和叙述重点上我们都把实用性放在首位。跨度大是指尽量覆盖医药学领域中常常涉及到的数学知识，让读者能在较少的时间内获得尽可能多的信息量。因此，我们将线性代数、微积分、微分方程、概率论、无穷级数融为一体，着眼于理解概念、掌握方法、学会运用，而且能举一反三。

教材编写的具体分工如下：

主　编　张世强

副主编　姚　莉，罗亚玲

编　委　陆洪娣，罗亚玲，姚　莉，张世强

其中第1章、第2章由罗亚玲执笔；第4章、第7章、第9章由陆洪娣执笔；第5章、第6章由姚莉执笔；第3章、第8章、第10章由张世强执笔。

在本书编写和出版过程中承蒙重庆医科大学教务处、教材科、基础医学院及科学出版社的鼎力支持，在此谨致谢意。

一本好教材理应经得起时间的考验、实践的考验和读者的考验。但愿这本教材会使读者开卷有益。本书的编者也期待得到读者的悉心指教。

编　者

2000年12月

目　录

第 1 章

函数、极限与连续

现代科学的发展已使各门学科的研究从定性分析阶段发展到定量研究阶段.当人们从量的角度来描述事物的变化及其规律时,就产生了函数的概念.函数关系即变量间的依赖关系,它是微积分学的主要研究对象.极限则是微积分学研究函数的重要方法,即研究变化着的量的方法.有了它,人们才能够以高于初等数学的观点和技术来研究函数,从而引出了从常量数学到变量数学的飞跃.而实际问题中出现的函数大多是具有所谓连续性的连续函数.

本章介绍极限的概念及其运算规则,连续函数的概念及其性质.

1.1 函　　数

1.1.1 区间及邻域(interval and neighborhood)

本节首先扼要地介绍一下本书常用的一类数集——区间及其特例邻域.

设 a、b 为实常数,且 $a<b$,则定义如下区间概念:

开区间:　$(a,b)=\{x\mid a<x<b,x\in\mathbf{R}\}$;

闭区间:　$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$;

半开半闭区间:　$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b,x\in\mathbf{R}\}$;

$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$.

以上区间为**有限区间**,下面一类区间统称为**无穷区间**:

$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a,x\in\mathbf{R}\};$$

$$(-\infty,a]=\{x\mid x\leqslant a,x\in\mathbf{R}\};$$

$$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}.$$

邻域是区间的特例.设 a 为数轴上的某定点,实数 $\delta>0$,则**点 a 的 δ 邻域**指的是数集

$$\{x\mid |x-a|<\delta,x\in\mathbf{R}\},$$

记为$\bigcup(a,\delta)$，简记为$\bigcup(a)$. 可见，点 a 的 δ 邻域就是区间$(a-\delta,a+\delta)$. 几何上讲，是以点 a 为中心、以 δ 为半径的开区间.

1.1.2 函数(function)的定义

定义 1 设某一变化过程中存在两个变量 x,y，若对于变量 x 在其变化范围 D 内的每一个值，按照某个对应法则 f，变量 y 都有惟一确定的值与之对应，则称在法则 f 下，变量 y 是确定在 D 上的**函数**. 记为：

$$y=f(x),x\in D,$$

其中，称变量 x 为函数的**自变量**，变量 y 为函数的**因变量**或**函数变量**. 称 D 为函数的**定义域**或**存在域**. 当 x 任取 D 中的一个值时，与之对应的 y 值称为**函数值**. 当 x 遍取 D 中各值时，相应的 y 值构成的集合

$$\{y|y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的**值域**，记为 $f(D)$.

决定一个函数的因素是其对应法则 f 及函数的定义域或存在域 D. 一般地，函数的定义域是由数学上函数有无意义来确定的. 当函数关系由实际问题给出时，定义域应由实际问题本身来确定.

例 1 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$的定义域.

解 欲使函数有定义，必有

$$x^2-4>0,$$

即

$$x<-2 \text{ 或 } x>2,$$

该函数的定义域为$(-\infty,-2)\bigcup(2,+\infty)$.

例 2 有人研究 20～90 岁之间，年龄对肾功能的影响，得出如下经验公式：

$$y=153.2-0.96x,$$

其中 x 表示年龄(岁)，y 表示菊粉清除率[ml/(1.73m^2. min)]. 则该函数的定义域是[20,90].

1.1.3 函数的表示法

常用的表示函数的方法有 3 种：

(1) 解析法

解析法即用数学式子表示函数的方法，又称**公式法**. 它是函数表示法中最重要的一种. 其优点在于形式简明，便于用数学分析的方法从理论上研究函数特性，并且可由此得出函数表、函数图形. 但遗憾的是对很多实际问题，要想得到变量间的函数关系并非易事.

有些函数在其定义域的不同范围内必须用不同的数学式子表示. 这种函数被称为**分段函数**.

例 3　静脉注射 G 钠盐 100,000 单位后，血清中的药物浓度 C 为时间 t 的函数 $C(t)$：

$$C(t)=\begin{cases}14.5t, & 0\leqslant t<0.25\\ 4.66-4.26t, & 0.25\leqslant t<1\\ 0.6-0.2t, & 1\leqslant t\leqslant 3\end{cases}$$

其中，时间 t 的单位为 h，$C(t)$ 的单位为：单位/ml.

上例中 $C(t)$ 即为一典型的分段函数. 显然 $C(t)$ 的定义域为 $[0,3]$.

在求分段函数的函数值时，应将不同范围的自变量代入相应范围的数学表达式计算；作图时，应在不同分段上根据相应数学表达式作出相应图形. 该例中，可分别计算 $t=0.5$ h 及 $t=2$ h 时的血药浓度如下：

$$C(0.5)=4.66-4.26\times 0.5=2.53\ \text{单位/ml},$$
$$C(2)=0.6-0.2\times 2=0.2\ \text{单位/ml}.$$

$C=C(t)$ 的图像如图 1.1 所示.

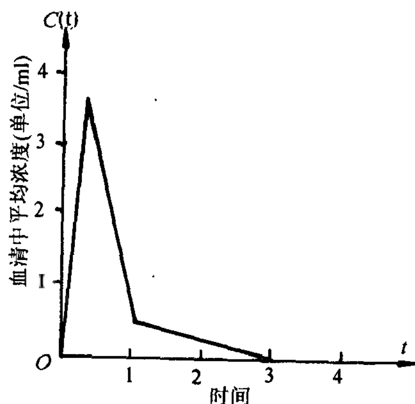


图 1.1

(2) 列表法

列表法是指用表格列出一系列自变量值及其所对应的函数值，以直接显示函数的对应关系的方法. 其特点是简明直接，但难以直接反应出变量间的内在规律. 医学等实验科学中常用此法.

例 4　葡萄糖耐糖试验. 对正常人、轻度糖尿病人及重度糖尿病人，都按 1.75 g/kg 体重的量口服葡萄糖. 服糖前（$t=0$ 时刻）及服糖后 0.5，1，2，3 小时各测一次血糖，有表 1.1 所示的数据.

表 1.1

口服葡萄糖后时刻 t(h)	0	0.5	1	2	3
正常人血糖水平 y_1(mg%)	95	135	150	100	88
轻度糖尿病人血糖水平 y_2(mg%)	115	150	175	165	120
重度糖尿病人血糖水平 y_3(mg%)	200	230	250	255	260

(3) 图像法

图像法是把变量之间的函数关系借助图形表示出来的方法，可形象地表示出函数变化的性状.

如由图 1.1 可分析出，静脉注射使血液中的药物浓度迅速升高（呈直线增加），在 1/4h 左右，血清中的药物浓度达到高峰，但很快消失，3h 后就很难测到了.

图像法在医学上亦经常使用，例如心电图、脑电图等.

1.1.4 函数的几种特性

(1) 单值性与多值性

本书所定义的函数一般称为单值函数,即当自变量 x 在函数定义域 D 内任取一个值时,函数变量 y 只有惟一确定的值与之对应,我们称函数的这一特性为函数的**单值性**.但在另一些情形下,变量 y 有一个以上确定的值与之对应,我们称函数的这一特性为函数的**多值性**.

如 $y=\arcsin x$ 是单值函数,$y=\text{Arcsin}x$ 是多值函数.本书涉及的函数主要是单值函数.

(2) 奇偶性

设函数 $y=f(x)$,$x\in D$,其中 D 是对称于原点的数集.若对任何 $x\in D$,有 $f(-x)=-f(x)$,称 $f(x)$ 为**奇函数**;若对任何 $x\in D$,有 $f(-x)=f(x)$,称 $f(x)$ 为**偶函数**.

奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称.但大量函数既不是奇函数,也不是偶函数.如函数 $y=\sin x+\cos x$.

(3) 单调性

设函数 $y=f(x)$,$x\in D$.若对 D 中任意两个数 x_1、x_2,当 $x_1<x_2$ 时,总有:

(i) $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 上**单调递增**;

(ii) $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 上**单调递减**.

这时称 $f(x)$ 为**单调函数**.若 $f(x)$ 在某区间内是单调的,则该区间称为 $f(x)$ 的**单调区间**.

若对 $x_1<x_2(x_1,x_2\in D)$,总有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 上严格单调递增;读者不难理解严格单调递减.

(4) 周期性

设函数 $y=f(x)$,$x\in D$.若存在某正数 T,使得对 D 内任何 x,关系式

$$f(x+T)=f(x)$$

总成立,则称 $f(x)$ 为**周期函数**,并称 T 为 $f(x)$ 的一个**周期**.

显然,若 T 为 $f(x)$ 的一个周期,则 $2T,3T,\cdots$ 均为 $f(x)$ 的周期,故周期函数一定有无限多个周期.

若在周期函数的所有周期中有一个最小周期,则称其为基本周期.

如函数 $y=\sin x$ 为周期函数,其周期为 $2k\pi,k\in\mathbf{N}$,基本周期为 2π.

(5) 有界性

设函数 $y=f(x)$,$x\in D$,若存在某正数 M,使得对任意 $x\in D$,有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**,并称 $f(x)$ 为 D 上的**有界函数**;否则,称函数 $f(x)$ 在 D 上**无界**.

有界函数的图像必落在直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间的带形区域内.

如三角函数 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 在整个数轴上是有界的，因为对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，它们的图像均落在 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间的带形区域内.

函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

思考题

1. 下列函数是否恒等？

 (i) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$；

 (ii) $y=2\ln x$ 与 $y=\ln x^2$.

2. 比较函数的三种表示法的特点，并思考在何种情形下适用哪种表示法.

3. 分段函数是一个函数还是几个函数？其定义域如何求？

4. 是否所有周期函数都存在最小正周期？

5. 你能否找到两个区间，使函数 $y=1/x$ 在其中一个区间上有界，在另一个区间上无界？

思考题解答

1. 略.

2. 略.

3. 分段函数是一个函数，其定义域为各分段之和.

4. 不是. 如常数函数 $y=C$，任何正数均为其周期. 它没有最小正周期.

5. 考虑区间 $(1/2,+\infty)$ 与 $(0,1)$.

1.2　初等函数

实际问题中常见的函数基本上是初等函数. 而初等函数是以基本初等函数为基础按一定方式构成的. 本节介绍基本初等函数及它们构成初等函数的方式.

1.2.1　基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数这六类函数被统称为**基本初等函数**(basic elementary function). 现将这些函数的表达式、定义域、值域、特性及图形列于表 1.2.

表 1.2

函数名称		表达式	定义域和值域	特性	图形
常量函数		$y=C$	定义域： $(-\infty,+\infty)$ 值域： $\{y \mid y=C\}$	偶函数； 不存在最小正周期的周期函数	
幂函数		$y=x^{\alpha}$ （α 为非零实数）	定义域和值域视 α 的取值而定.	奇偶性视 α 的取值而定，图像均过(1，1)点	
指数函数		$y=a^{x}$ $(a>0,a\neq1)$	定义域： $(-\infty,+\infty)$ 值域： $(0,+\infty)$	$a>1$ 时，图像单调递增； $0<a<1$ 时，图像单调递减. 图像过(0，1)点	
对数函数		$y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$	定义域： $(0,+\infty)$ 值域： $(-\infty,+\infty)$	$a>1$ 时，图像单调递增； $0<a<1$ 时，图像单调递减. 图像过(1，0)点	
三角函数	正弦函数	$y=\sin x$	定义域： $(-\infty,+\infty)$ 值域： $[1,-1]$	奇函数； 有界函数； 周期函数（基本周期为 2π）	
	余弦函数	$y=\cos x$	定义域： $(-\infty,+\infty)$ 值域： $[1,-1]$	偶函数； 有界函数； 周期函数（基本周期为 2π）	

续表 1.2

函数名称		表达式	定义域和值域	特　性	图　形
三角函数	正切函数	$y=\tan x$	定义域：$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in \mathbf{Z}$ 值域：$(-\infty,+\infty)$	奇函数；周期函数（基本周期为 π）	
	余切函数	$y=\cot x$	定义域：$x\neq k\pi,k\in \mathbf{Z}$ 值域：$(-\infty,+\infty)$	奇函数；周期函数（基本周期为 π）	
反三角函数	反正弦函数	$y=\arcsin x$	定义域：$[-1,1]$ 主值域：$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	主值范围 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 内单调递增	
	反余弦函数	$y=\arccos x$	定义域：$[-1,1]$ 主值域：$[0,\pi]$	主值范围 $[0,\pi]$ 内单调递减	
	反正切函数	$y=\arctan x$	定义域：$(-\infty,+\infty)$ 主值域：$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	主值范围 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递增	

续表 1.2

函数名称		表达式	定义域和值域	特　性	图　形
反三角函数	反余切函数	$y=\operatorname{arccot}x$	定义域 $(-\infty,+\infty)$ 主值域： $(0,\pi)$	主值范围 $(0,\pi)$内单调递减	y, 2π, π, O, x, −π

1.2.2　复合函数

常见函数是由基本初等函数按一定方式构成的，其中最基本的构成方式之一是函数的复合.

定义 1　设函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，D^* 表示 $u=\varphi(x)$的定义域 D 中使得 $y=f(u)$有意义的全体 x 的非空集合. 对于函数 $u=\varphi(x)$，当 x 在 D^* 内取值时，所对应的 u 值使得函数 $y=f(u)$有定义，则 y 就通过 u 与 x 建立了函数关系：

$$y=f[\varphi(x)],x\in D^*,$$

这时称 y 为 x 的**复合函数**. 其中，称 $y=f(u)$为**外函数**，$u=\varphi(x)$为**内函数**，u 为**中间变量**.

例 1　设 $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$，求出 y 关于 x 的复合函数.

解　$y=\sqrt{u}$ 的定义域是$[0,+\infty)$；

$u=1-x^2$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$，其中当且仅当 $x\in[-1,1]$时，$u=1-x^2\in[0,+\infty)$.

∴　y 关于 x 的复合函数为：$y=\sqrt{1-x^2}$，$x\in[-1,1]$.

复合函数概念是为了微积分学中技术上的需要而提出的一个结构性概念. 分清复合函数的结构是今后复合函数求导、换元积分的重要基础，也是本门课程的基本功之一.

例 2　试分析下列函数的复合结构：

$$y=a^{x^2},(a>0,a\neq1)$$

解　$y=a^{x^2}$的外函数为 $y=a^u$，令 $u=x^2$ 为中间变量，则 $y=a^{x^2}$可分解为：

$$y=a^u,u=x^2.$$

函数的复合不仅限于两个函数，有时可以由两个以上的函数经过多次复合而构成一个复合函数. 请读者参照定义 1 自行定义由 3 个函数复合成一个函数的情况.

例 3　分析 $y=\sqrt[3]{\lg(2x+1)}$ 的复合结构.

解　设 $y=\sqrt[3]{u}$，$u=\lg v$，$v=2x+1$，则 $y=\sqrt[3]{\lg(2x+1)}$ 由上述 3 个基本初等函数复合而成.

1.2.3　反函数

在研究两个变量的函数关系时，若 $y=f(x)$，则认为变量 y 的取值是依赖变量 x 而确定的. 但在实际问题中，有时也需要研究变量 x 对于变量 y 的依赖关系. 例如，在以 v_0 为速度作匀速直线运动的过程中，可以由物体的运动时间 t 来确定物体所通过的路程 s：

$$s=v_0t, \tag{1.1}$$

但也可以由物体所通过的路程来确定所需的时间：

$$t=\frac{s}{v_0}, \tag{1.2}$$

这时，称函数(1.2)是函数(1.1)的反函数.

定义 2　已知函数

$$y=f(x),x\in D, \tag{1.3}$$

其值域为 $f(D)$. 若对于 $f(D)$ 中每一个值 y_0，D 中只有一个值 x_0，使得

$$f(x_0)=y_0,$$

令 x_0 与 y_0 相对应. 则称由上述法则所确定的函数为函数(1.3)的**反函数**，记为

$$x=f^{-1}(y),y\in f(D).$$

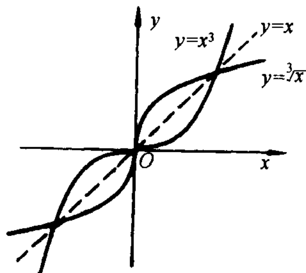


图 1.2

由于习惯上用 x 表示自变量，y 表示函数变量，故(1.3)的反函数通常记为

$$y=f^{-1}(x),x\in f(D) \tag{1.4}$$

当然，函数(1.3)也是(1.4)的反函数. 故说函数(1.3)和函数(1.4)互为反函数. 函数(1.3)与(1.4)的图像关于直线 $y=x$ 对称. 例如，函数 $y=x^3$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 与函数 $y=\sqrt[3]{x}$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 互为反函数. 它们的图像如图 1.2.

下面给出一个反函数存在的充分条件.

定理　严格单调函数必有反函数. 严格递增(减)函数的反函数也严格递增(减).

1.2.4　隐函数

在所讨论的函数中，自变量 x 与函数变量 y 之间的函数关系通常表示为

$y=f(x)$的形式，表达式$f(x)$中不含变量y，我们把这种形式的函数称为**显函数**. 有时还会遇到函数关系不是用显函数形式表示，而是由下面的方式规定的：

已知方程

$$F(x,y)=0. \tag{1.5}$$

若对x取的每一个值，代入方程，可解出确定的y值，令这些y值与x对应，则由方程(1.5)便定义了y为x的函数. 我们称这种由方程确定的函数为**隐函数**，方程(1.5)则被称为函数y的隐函数方程.

在有些函数关系中，函数y是无法表示成显式的. 例如由方程

$$y-x-a\sin y=0$$

所确定的函数；而在另一些函数关系中，不必将函数y显式表示. 例如由圆的方程

$$x^2+y^2=r^2$$

所确定的函数，对其隐函数方程的研究更为方便.

1.2.5 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算与有限次复合运算步骤而构成的，可用一个解析式表示的函数，叫**初等函数**(elementary function).

如$\sin 2x$，$\arcsin 2x+\dfrac{\tan^2 x}{x}$，$\ln(1+\sqrt{1+x^2})\cos x$等都是初等函数.

初等函数以其存在域为定义域. 确定初等函数的存在域可由下列步骤进行：

1) 分析所给初等函数是由哪几个基本初等函数经过哪几个运算步骤而得到的；

2) 定出这些基本初等函数的定义域，并弄清每次运算对它们的存在域所加的限制；

3) 把全部限制条件综合起来确定出函数的存在域.

本教材所讨论的函数主要是初等函数. 那些不是初等函数的函数，统称为**非初等函数**，即不能由基本初等函数经过有限次四则运算与有限次复合步骤而得，或不能用一个数学式子表示的函数. 某些分段函数就其整体来讲就不是初等函数，但它的每一段都是初等函数.

思考题

1. 是否任意两个函数$y=f(u)$与$u=\varphi(x)$都能通过中间变量u复合成一个函数？试举例说明？

2. 复合函数是否是一个新的函数类？

3. 设$\varphi(x)=x^2$，$\psi(x)=2^x$，求$\varphi[\varphi(x)]$，$\psi[\psi(x)]$，$\varphi[\psi(x)]$及$\psi[\varphi(x)]$. 并由此体会如何分解复合函数.

4. 是否每个函数都有反函数?

5. 什么是初等函数?

思考题解答

1. 不是. 如函数 $y=\arcsin u, u=2+x^2$.

2. 不是.

3. $\varphi[\varphi(x)]=(x^2)^2, \psi[\psi(x)]=2^{2^x}, \varphi[\psi(x)]=(2^x)^2=2^{2x}, \psi[\varphi(x)]=2^{x^2}$.

4. 不是. 如函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内没有反函数. 但 $y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 内有反函数 $y=\sqrt{x}$, 在 $(-\infty,0]$ 内有反函数 $y=-\sqrt{x}$.

5. 略.

1.3 极限概念

要研究变化着的量,初等数学的方法已无能为力. 为了进一步研究函数性状,我们引入极限概念. 函数的极限运算是一种非初等运算,它是微积分学研究函数的基本工具,通过它可以深入到函数的局部去了解函数. 不仅如此,极限方法也是一种辩证的思维方法,通过对极限概念的学习可以体会如何在运动的过程中去把握变化着的事物,从而深化对客观世界的认识.

我们不妨先从极限的特殊情况——数列极限入手去认识极限概念,再进一步认识一般的函数极限.

1.3.1 数列极限(limit of sequence)

若函数 $y=f(n), n\in \mathbf{N}$,则称该函数为**数列**(sequence). 因自然数集 $\mathbf{N}$ 的元素可按顺序排列,故若令 $x_n=f(n)$,则数列 $f(n)$ 也可写作

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

从而数列有时也称作**序列**. 其中第 n 项 x_n 叫做数列的**通项**或**一般项**. 数列的几何形象为数轴上的一列点.

观察几个数列:

例 1 数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ (1.6)

数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}: \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$ (1.7)

数列 $\{n\}: 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$ (1.8)

数列 $\{(-1)^{n-1}+1\}: 2, 0, 2, 0, \cdots, (-1)^{n-1}+1, \cdots$ (1.9)

以上数列均为无穷数列. 其中 n 的变化趋势显然是趋于无穷大(记 $n\to+\infty$).

观察上面的例子可以看出，当数列的项数 n 越来越大时，数列$\{x_n\}$的变化情况不同，大体可归纳为3种情况：

1）数列的项与某常数无限接近，如数列(1.6)、(1.7)；

2）数列的项趋于无穷，如数列(1.8)；

3）数列各项无固定趋势，如数列(1.9)，其项 x_n 在2与0之间无限摆动.

所谓数列的极限问题，就是要讨论在自变量 $n\to+\infty$ 的过程中，数列中各项的变化趋势.

观察数列(1.6)，其几何形象如图1.3.它的第 n 项 x_n 对应于数轴上第 n 个点 $x_n=1/n$. 可见 $n\to+\infty$ 时，x_n 与0点的距离无限减小，或称任意小. 即

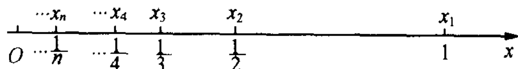


图 1.3

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}.$$

在 $n\to+\infty$ 时任意小，记为

$$|x_n-0|\to 0\quad (n\to+\infty),$$

这时称$\{1/n\}$在 n 趋于无穷大时以0为极限.

再观察数列(1.7). 如图1.4. 当 n 无限增大时，$x_n=\dfrac{n}{n+1}$ 与常数1的距离

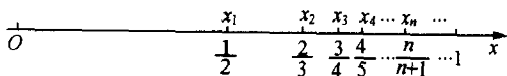


图 1.4

$$|x_n-1|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}\to 0,$$

称$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$以1为极限.

下面给出数列极限的准确定义：

定义1 已知数列$\{x_n\}$，A 是某确定常数. 若当项数 n 无限增大时，数列的项 x_n 与常数 A 的距离 $|x_n-A|$ 任意小，则称**数列$\{x_n\}$以常数 A 为极限**，记为

$$\lim_{n\to+\infty} x_n=A \text{ 或 } x_n\to A(n\to+\infty).$$

这时，称数列$\{x_n\}$是**收敛**(converge)的；否则，是**发散**(diverge)的.

根据定义1，可将例1中数列(1.6)、(1.7)的变化趋势记为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0,\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

且称数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$收敛于 0，数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$收敛于 1. 而数列$\{n\}$与$\{(-1)^{n-1}+1\}$在 n 趋于无穷大时是发散的.

在定义 1 所定义的极限过程中，$|x_n-A|$任意小是在 $n\to+\infty$这一无穷过程中实现的，它恰好反映了在$n\to+\infty$时，数列的几乎所有项 x_n 与常数 A 无限接近这种使整个数列渐趋稳定的性态. 这种稳定性是运动之中的稳定性，它是初等数学的任何语言所无法描述的. 而此时极限语言的应运而生，正是对这种无限过程之中的稳定性态的恰到好处的刻画.

本书的极限定义是从几何直观的角度给出的描述性定义. 严格的极限定义需用到更为抽象的数学语言——"ε-N"语言，它是以如下方式来描述极限概念的：

定义 1 中，随项数 n 的无限增大，数列的项 x_n 与某常数 A 的距离任意小. 要使$|x_n-A|$任意小，只要 n 充分大即可. 比如数列(1.7)，要使

$$|x_n-1|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{100},$$

只要 $n>99$ 便可；要使$|x_n-1|<\frac{1}{1000}$，只要 $n>999$ 便可. 一般地，要使$|x_n-1|$小于无论多么小的正数 ε，只要 n 充分大，即 $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$ 便可，若记 N 为大于$\frac{1}{\varepsilon}-1$ 的最小整数，则 $n>N$ 便可. 因此，又有如下数列极限的定义：

定义 1′　已知数列$\{x_n\}$，A 是某确定常数. 若对任给的正数 ε，总存在某个自然数 N，使得 $n>N$ 时，都有

$$|x_n-A|<\varepsilon,$$

则称数列$\{x_n\}$收敛于 A，并称$\{x_n\}$在 n 趋于无穷大时以 A 为极限.

以上极限的 ε-N 定义仅供参考，有兴趣深入的读者可参阅参考文献[1～2].

例 2　证明数列 $x_n=\frac{1+(-1)^n}{n}$以 0 为极限.

证明　由于

$$|x_n-0|=\left|\frac{1+(-1)^n}{n}-0\right|\leqslant\frac{2}{n},$$

而 $n\to+\infty$时，$\frac{2}{n}\to0$，从而$|x_n-0|\to0$，故

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+(-1)^n}{n}=0.$$

实际求数列极限时，通常借助于极限的运算法则和常用极限，这将在 1.4 节中介绍.

1.3.2 函数极限(limit of function)

数列 $y=f(n), n\in \mathbf{N}$ 中,若将其中的自变量 n 用 x 表示,即是 $y=f(x), x\in \mathbf{N}$. 这是一种特殊的函数,其特殊性表现在 x 在 $\mathbf{N}$ 内离散地取值. 研究这种函数的极限时,其自变量的变化趋势显然是 $x\to+\infty$.

对任意函数 $y=f(x), x\in D$,自变量 x 一般是在 D 内连续变化的. 讨论其极限时,自变量的变化趋势有两种情形:$x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$;$x\to x_0$,x_0 为某个有限值.

$x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

定义 2 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 内有定义,A 是某确定常数. 若 x 趋于正无穷时,$f(x)$ 与 A 的距离 $|f(x)-A|$ 任意小,则称**函数 $f(x)$ 在 x 趋于正无穷时以 A 为极限**,并称 **$f(x)$ 在 x 趋于正无穷时收敛于 A**. 记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to+\infty).$$

$x\to+\infty$ 时的函数极限可参照 $n\to+\infty$ 时的数列极限来理解,区别在于 x 的变化是连续的.

$x\to+\infty$ 时的函数极限也可以下列更为专业的方式定义,仅供参考.

定义 2′ 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 内有定义,A 是某确定常数. 若对任给的正数 ε,总存在某个正数 M,使得当 $x>M$ 时,总有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 x 趋于正无穷时以 A 为极限.

例 3 考察下列函数在 $x\to+\infty$ 时的极限:

(a) $f(x)=\frac{1}{x}$,当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)$ 与 0 无限接近,即 $|f(x)-0|=\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{|x|}\to 0$,故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. 见图 1.5(a),从图中可看出,$y=\frac{1}{x}$ 在 $x\to+\infty$ 时以 x 轴为渐近线.

(b) $g(x)=\arctan x$,显然 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$,见图 1.5(b).

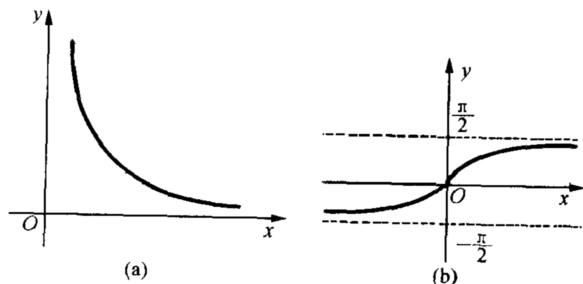


图 1.5

同样可定义 $x\to-\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，作为练习留给读者. 如图 1.5(b)，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

在 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时，函数没有极限的情形也是有的. 当 $x\to+\infty$ 时，函数 $y=x$ 的函数值趋于无穷大，而函数 $y=\sin x$ 的函数值则在 1 与 −1 之间无限摆动，它们均不趋于任何有限常数，这时我们称 **x 趋于正无穷(或 x 趋于负无穷)时函数极限不存在或发散.**

$x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

例 4　函数 $f(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{x-1}$(图 1.6)，它在 $x=1$ 处无定义. 考察 $x\to1$ 时，函数值的变化情况，显然它所对应的函数值趋近于 4.

上述例子和 $x\to+\infty$ 时函数极限存在的情形相仿. 这里是"当 $x\to x_0$(但不等于 x_0)时，对应的函数值 $f(x)$ 趋于某个确定的常数 A"，称之为 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 以 A 为极限.

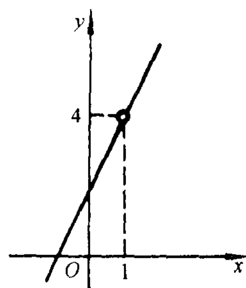


图 1.6

定义 3　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的附近有定义，A 是某确定常数. 若当自变量 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 与 A 的距离 $|f(x)-A|$ 任意小，则称**函数 $f(x)$ 在 x 趋于 x_0 时以 A 为极限**，并称 **$f(x)$ 在 x 趋于 x_0 时收敛于 A**. 记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0).$$

定义中只要求函数 $f(x)$ 在 x_0 的附近有定义，而不要求 $f(x)$ 在 x_0 有定义. 这里只要求"附近"是意味着不考虑函数 $f(x)$ 在点 x_0 的情形，我们只研究 x 趋于 x_0(但不等于 x_0)时函数的变化趋势. 事实上，从例 4 可以看到，其中的函数是有趋势的，从而极限存在，但该函数在 x_0 处没有定义.

定义 3 中，x 趋于 x_0 是指 x 从 x_0 的两侧趋于 x_0.

我们也可用"ε-δ"语言来严格地定义 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限. 如例 4 中，由于

$$|f(x)-A|=\left|\frac{2(x^2-1)}{x-1}-4\right|=|2(x+1)-4|=2|x-1|,$$

要使 $|f(x)-A|$ 小于任给的无论多么小的正数 ε(它反映 $f(x)$ 与 4 任意接近的程度)，只要 $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 便可. 这里 $\varepsilon/2$ 标志着 x 与 $x_0=1$ 的接近程度，常把它记为 δ. 由于不考虑 $f(x)$ 在 $x_0=1$ 处的状况，故有 $0<|x-1|<\delta$. 这样，对任给的正数 ε，都可找到一个 δ，只要 $0<|x-1|<\delta$，则 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

定义 3′　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的附近有定义，A 是某确定常数. 若对任给的正数 ε，总存在正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 x 趋于 x_0 时以 A 为极限.

例 5 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x_0^2}$, $(|x_0|<1)$.

证明 由于 $|x_0|<1$,故有

$$\begin{aligned}|\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x_0^2}|&=\frac{|(1-x^2)-(1-x_0^2)|}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x_0^2}}=\frac{|x^2-x_0^2|}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x_0^2}}\\&=\frac{|x-x_0|\cdot|x+x_0|}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x_0^2}}\leqslant\frac{|x-x_0|(1+1)}{\sqrt{1-x_0^2}}\\&=\frac{2}{\sqrt{1-x_0^2}}|x-x_0|,\end{aligned}$$

即 $|\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x_0^2}|\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{1-x_0^2}}|x-x_0|$.

$x\to x_0$ 时, $|x-x_0|\to 0$, 由于 $\dfrac{2}{\sqrt{1-x_0^2}}$ 是常数,故 $\dfrac{2}{\sqrt{1-x_0^2}}|x-x_0|\to 0$,从而

$$\left|\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x_0^2}\right|\to 0,$$

故

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x_0^2}.$$

由定义 3,读者还可自行推得如下常用的结论:

$$\lim_{x\to x_0}C=C,\ \lim_{x\to x_0}x=x_0,\ \lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0,\ \lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0,$$

这里 C 为常数, x_0 为任一实数. 事实上可以证明**对其他类型的基本初等函数,当 x_0 为其定义域内之点时,均有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$**.

当然,有些函数在其自变量的某些变化过程中极限不存在.

例 6 (a) $x\to 0$ 时, $|x|\to 0$,故 $\dfrac{1}{|x|}\to+\infty$. 所以 $\dfrac{1}{|x|}$ 在 $x\to 0$ 时极限不存在.

(b) $x\to 0$ 时, $\sin\dfrac{1}{x}$ 在 1 与 -1 之间无限摆动. 故 $x\to 0$ 时, $\sin\dfrac{1}{x}$ 不趋近于任何有限常数,从而极限不存在.

若 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 极限不存在,称 **$f(x)$ 在 x 趋于 x_0 时发散**.

有些函数在其定义域内某些点的左侧与右侧有不同的解析表达式(如分段函数在其定义域中的分段点),或函数仅在某些点的一侧有定义(如其定义域区间的端点),这时函数在这些点上的极限问题只能单侧地加以讨论.

1.3.3 单侧极限(one-sided limit)

定义 4 设 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta, x_0)$ $(\delta>0)$ 内有定义, A 是某确定常数. 若 x 从

x_0 的左侧趋于 x_0 时，$f(x)$ 趋于 A，则称 $f(x)$ 在 x 从 x_0 的左侧趋于 x_0 时以 A 为**左极限**，记为：

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A.$$

同理，若 $f(x)$ 在区间 $(x_0,x_0+\delta)(\delta>0)$ 内有定义，可定义函数 $f(x)$ 在 x_0 的**右极限**：

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

（请读者自行完成）. 左、右极限统称为**单侧极限**.

例 7　已知符号函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

则

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1,$$
$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}1=1.$$

可见，函数 $f(x)$ 在某点的左、右极限不必是相等的. 这时，若考察 x 从 x_0 的两侧趋于 x_0 时 $f(x)$ 的变化状况，显然 $f(x)$ 在 1 与 -1 之间无限摆动，从而 $f(x)$ 极限不存在.

由上例可看出，函数的单侧极限与 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不是相同的概念，它们之间有如下的定理：

定理　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A.$$

因此，即使函数的左、右极限都存在，函数极限也未必存在，如例 7. 所以，该定理也给出了一个判别函数极限是否存在的方法.

思考题

1. 数列的极限问题讨论的是什么？函数的极限问题呢？

2. 战国时代哲学家庄周所著的《庄子 · 天下篇》中引用过一句话："一尺之棰，日取其半，万世不竭". 试体会其中所包含的极限思想，并写出相应的数列及其在 $n\to+\infty$ 时的极限.

3. 分别写出等比级数

$$a,aq,aq^2,\cdots,aq^{n-1},aq^n,\cdots\quad(a\neq 0,q\neq 1)$$

和等差级数

$$a, a+d, a+2d, \cdots, a+(n-1)d, a+nd, \cdots \quad (ad \neq 0)$$

的前 n 项和 S_n，并考察 $n \to +\infty$ 时 S_n 的极限.

4. 试定义 $x \to -\infty$ 时的函数极限.

5. 定义 3 中，为何只要求 $f(x)$ 在 x_0 的附近有定义，而不要求 $f(x)$ 在 x_0 有定义？

6. 就同一函数而言，自变量的不同变化趋势一般将导致函数值的不同变化趋势. 你能对此举例说明吗？

7. 如果 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在，$f(x)$ 在 x_0 处的极限是否存在？为什么？

思考题解答

1. 略

2. $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$，$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

3. 等比级数的 $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$. $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$；$|q| > 1$ 时，$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ 不存在；等差级数的 $S_n = na + \frac{n(n-1)}{2}d$，$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ 不存在.

4. 参见定义 2.

5. 略.

6. 如 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$，$\lim\limits_{x \to -1} \frac{1}{x} = -1$，$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ 不存在.

7. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在. 见本节定理.

1.4 极限的计算

在 1.3 中，我们引入了 5 种类型的极限：$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$，$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$，$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$. 数列极限视作第一种类型的特例. 在 1.3 中，我们只能根据极限的定义或直观判断来确定函数的极限，但对较复杂的函数，则需要借助其他更为有效的方法来计算它们的极限. 为此，本节介绍求极限的基本方法.

本节中的定理针对 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 极限类型给出，但对其他类型的极限也是适用的. 希望读者在学习时注意. 另外，由于定理的证明用到极限的 ε-δ 定义，故不加证明地给出. 希望了解的读者可参阅参考文献[1].

1.4.1 极限的四则运算法则

定理 若极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ 都存在，则 $f(x) \pm g(x)$，$f(x) \cdot g(x)$ 在

$x\to x_0$时极限也存在，且

(a) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$；

(b) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$；

又若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$，则$\dfrac{f(x)}{g(x)}$在$x\to x_0$时极限存在，且

(c) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$.

推论　若$\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x),\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x),\cdots,\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)$存在，则

(a) $\lim\limits_{x\to x_0}[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)\pm\cdots\pm\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)$；

(b) $\lim\limits_{x\to x_0}[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\cdots\cdot f_n(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)\cdot\cdots\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)$；

特别地，若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]^n, n\in\mathbf{N}$.

$\lim\limits_{x\to x_0}[kf(x)]=k[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]$，$k$是常数.

利用上述定理及其推论，可以从几个较简单的函数极限出发，计算较复杂的函数极限.

例1　求下列极限：

(a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^3+2x-1)$.

解　由于$\lim\limits_{x\to 2}x^3=(\lim\limits_{x\to 2}x)^3=2^3=8$，

$\lim\limits_{x\to 2}2x=2\lim\limits_{x\to 2}x=2\times 2=4$，

$\lim\limits_{x\to 2}1=1$，

由前面的定理，我们有

$$\lim_{x\to 2}(x^3+2x-1)=\lim_{x\to 2}x^3+\lim_{x\to 2}2x-\lim_{x\to 2}1=(\lim_{x\to 2}x)^3+2\lim_{x\to 2}x-\lim_{x\to 2}1=8+4-1=11.$$

(b) $\lim\limits_{x\to\pi/4}(x\tan x-1)$.

解　$x\tan x-1=\dfrac{x\sin x}{\cos x}-1$，且$\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$，由于

$$\lim_{x\to\pi/4}\cos x=\cos\frac{\pi}{4}\neq 0,$$

故

$$\lim_{x\to\pi/4}(x\tan x-1)=\frac{\lim\limits_{x\to\pi/4}x\cdot\lim\limits_{x\to\pi/4}\sin x}{\lim\limits_{x\to\pi/4}\cos x}-\lim_{x\to\pi/4}1=\frac{\frac{\pi}{4}\times\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}-1=\frac{\pi}{4}-1.$$

(c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$.

解 由于 $\lim\limits_{x\to -1}(x+1)=0$，故该式不能直接用前面定理中的等式(3)，但当 $x\neq 1$ 时，

$$\frac{x^2-x-2}{x+1}=\frac{(x+1)(x-2)}{x+1}=x-2,$$

故

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x-2)=-1-2=-3.$$

(d) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$.

解 $x\to -1$ 时，$\dfrac{1}{x+1}$ 和 $\dfrac{3}{x^3+1}$ 都没有极限，故不能直接用定理. 但 $x\neq 1$ 时，

$$\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}=\frac{(x+1)(x-2)}{x^3+1}=\frac{x-2}{x^2-x+1},$$

故

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2-x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}x-2}{\lim\limits_{x\to -1}x^2-\lim\limits_{x\to -1}x+1}=\frac{-1-2}{(-1)^2-(-1)+1}=-1.$$

1.4.2 两个重要极限

有两个极限作为求极限的常用工具，经常被用到. 本书不加证明地给出，其证明可参阅参考文献[2].

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}\quad \textbf{(}\boldsymbol{x}\ \textbf{为弧度数)}$$

例 2 求下列函数极限：

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}\quad (k\neq 0)$.

解 令 $kx=t$，则 $x\to 0$ 时 $t\to 0$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{k\sin t}{t}=k\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=k\times 1=k.$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=1\times\dfrac{1}{1}=1.$

(c) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$.

解 令 $\pi-x=t$，则 $\sin x=\sin(\pi-x)=\sin t$，且 $x\to\pi$ 时，$t\to 0$，故

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1.$$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解　由于$\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{2\sin^2 x/2}{x^2}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin x/2}{x/2}\right]^2$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x/2}{x/2}\right]^2=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}.$$

从以上例题不难看到，我们常利用该极限求解与三角函数有关的函数的极限问题.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

例 3　求下列极限：

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{k}{x}\right)^x$，$k$ 是非零常数.

解　需将$\left(1-\dfrac{k}{x}\right)^x$变形成公式中的形式：

$$\left(1-\frac{k}{x}\right)^x=\left[\left(1+\frac{1}{-x/k}\right)^{-\frac{x}{k}}\right]^{-k}$$

令$-\dfrac{x}{k}=t$，则 $x\to\infty$时，$t\to\infty$，故

$$原式=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-k}=\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-k}=e^{-k}.$$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$.

解　由于

$$\left(\frac{x}{1+x}\right)^x=\frac{1}{(1+1/x)^x},$$

故

$$原式=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^x}=\frac{1}{e}.$$

在应用中，上述重要极限还可以另一种形式出现：令 $1/x=\alpha$，$x\to\infty$时 $\alpha\to 0$，故$\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\mathrm{e}$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}$.

解　令 $\tan x=t$，则 $x\to 0$ 时，$t\to 0$，故

$$原式=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}.$$

思考题

1. 以下极限式是否正确？为什么？

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x+1}-\lim\limits_{x\to 1}\frac{3}{x^3+1}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-2}{x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-2)}{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin x}{x}=$？ $(x_0\neq 0)$；$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sin x}{x}=$？.

3. 本节定理之推论中的结论

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^k=[\lim_{x\to x_0}f(x)]^k$$

对 k 取零和负整数时还成立吗？为什么？

4. 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则惟一存在. 你能推断出这是为什么吗？

5. 若在 x_0 的附近，有 $h(x)<f(x)<g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，则推想 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 有极限吗？若有，是什么？

思考题解答

1. (1)，(2)，(3)均不正确. 参见本节定理.

2. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin x_0}{x_0}$；$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sin x}{x}=0$. 参见 1.5 节.

3. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq 0$ 时，原式成立.

$k=0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^0=1$，$[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]^0=A^0=1$；

$k=-n(n\in\mathbf{N})$时，$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{-n}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{[f(x)]^n}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n}=\frac{1}{A^n}=A^{-n}$，

故 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^k=[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]^k$.

4. 试假设若有两个极限，情况会如何. 该结论称为"极限存在的惟一性定理".

5. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 该结论称为"夹逼定理".

4，5 两题的证明可参阅参考文献[1].

1.5 无穷小量与无穷大量

现在以极限为工具去认识微分学中两类非常重要的变量：无穷小量与无穷大

量.

1.5.1 无穷小量(infinitesimal)

定义 1　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,则称函数变量 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的**无穷小量**.

如 x^2 是 $x\to 0$ 时的无穷小量,$\sin(x-a)$是 $x\to a$ 时的无穷小量.

对于定义在区间上的函数而言,也可以定义其在自变量其他变化趋势下的无穷小量:

$x\to+\infty, x\to-\infty, x\to x_0^+, x\to x_0$ 等.对数列的情形,也可定义 $n\to+\infty$时的无穷小量,这时称该数列为**无穷小数列**.

如 $1/x^n$ 是 $x\to+\infty$时的无穷小量,$1/2^n$ 是 $n\to+\infty$时的无穷小数列.

由上可知,无穷小量不是一个很小的数,而是一类特殊的函数或变量,它们以零为极限.

由无穷小量的定义及极限的四则运算法则,可立即推得无穷小量有如下性质:

①两个无穷小量的代数和仍是无穷小量,从而有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量;

②有界函数与无穷小量的乘积仍是无穷小量,从而常量与无穷小量的乘积仍是无穷小量;有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量.

例 1　证明$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$.

证明　由于$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$,故 $\sin\dfrac{1}{x}$为有界变量,而 $x\to 0$ 时,x^2 为无穷小量.由无穷小量的性质 2 知,$x\to 0$ 时,$x^2\sin\dfrac{1}{x}$仍为无穷小量.

所以,$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$.

由极限定义,还可推出如下定理,

定理　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-A]=0.$$

此定理对 x 的其他变化趋势也是成立的.

在该定理之下,记 $\alpha=f(x)-A$,则 α 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量,从而函数$f(x)$可写为

$$f(x)=A+\alpha\quad(\lim_{x\to x_0}\alpha=0).$$

所以,有极限的函数可表为其极限与一无穷小量之和.

1.5.2 无穷小量阶的比较

无穷小量是以零为极限的变量,但收敛于零的速度有快有慢.为此,考察两个无穷小量的比,以便对它们收敛于零的速度作出判断,我们将这一过程称为**无穷小**

量阶的比较. 具体的比较如下：

设 $x\to x_0$ 时，$f(x)$、$g(x)$均为无穷小量.

(a) 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$为 $g(x)$的**高阶无穷小量**，亦称 $g(x)$为 $f(x)$的**低阶无穷小量**. 记为

$$f(x)=o(g(x)) \quad (x\to x_0).$$

(b) 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k(k\neq 0)$，则称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$与 $g(x)$为**同阶无穷小量**，记为

$$f(x)=O(g(x)) \quad (x\to x_0).$$

特别地，若 $k=1$，称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$与 $g(x)$为**等价无穷小量**. 记为

$$f(x)\sim g(x) \quad (x\to x_0).$$

例 2 (a) $x\to 0$ 时，$x,x^2,x^3,\cdots,x^n$ 等都是无穷小量，但是它们一个比一个高阶，即

$$x^{k+1}=o(x^k) \quad (x\to 0),k=1,2,\cdots,n-1.$$

(b) 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x$ 与 x^2 同为无穷小量，由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},$$

所以 $1-\cos x$ 与 x^2 在 $x\to 0$ 时为同阶无穷小量. 如果规定 $x\to 0$ 时 x 为二阶无穷小，则 $1-\cos x$ 也为二阶无穷小.

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，则 $x\to 0$ 时 $\sin x$ 与 x 为等价无穷小量，即

$$\sin x\sim x \ (x\to 0);$$

同理，

$$\tan x\sim x \ (x\to 0).$$

在求两个函数乘积或商的极限时，往往可以用分子或分母中因子的等价无穷小量来代替相应的部分，以简化计算. 具体作法示例如下.

例 3 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\tan 3x}$.

解 由于 $\sin 4x\sim 4x(x\to 0)$，$\tan 3x\sim 3x(x\to 0)$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{3x}=\frac{4}{3}.$$

1.5.3 无穷大量(infinitely great)

在没有极限的一类函数中，如函数 $f(x)=1/x$，$x\to 0$ 时，它虽不收敛于常数，但却有明显的趋向，即随着 x 趋于 0 而无限增大. 这类情形称为函数具有非正常极限∞. 这时，称该函数为无穷大量.

定义 2　若$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$，则称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的**无穷大量**.

可见，无穷大量本质上是指无限增大的变量，它当然不是常数. 数列的情形也称为**无穷大数列**.

例如，$\tan x$ 是 $x\to\pi/2$ 时的无穷大量，因为$\lim\limits_{x\to\pi/2}\tan x=+\infty$.

$x\to 0$ 时，$1/x$ 是无穷大量；而 $x\to+\infty$时，$1/x$ 是无穷小量；但在其余情形下，$1/x$ 既不是无穷大量，也不是无穷小量.

可见，一个变量是无穷大量还是无穷小量，是相对于自变量的变化趋势而言的，不能孤立地谈论.

根据无穷小量与无穷大量的定义，可知它们之间有如下关系：

无穷大量的倒数为无穷小量；无穷小量的倒数为无穷大量.

由此可知，对无穷大量的研究完全可以归结为对无穷小量的研究.

思 考 题

1. 能否说一个非常小的数是无穷小量，一个非常大的数是无穷大量？ 为什么？
2. 有限个无穷小量之和是无穷小量，无限个无穷小量之和还是无穷小量吗？
3. 若 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 可表示为一个常数与 $x\to x_0$ 时的一个无穷小量之和，则 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 有极限吗？
4. 若 α 是 β 的高阶无穷小量，而 β 是 γ 的高阶无穷小量，则能比较 α 和 γ 的阶吗？
5. 若 $\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$，则 α 与 γ 等价吗？
6. 是否任意两个无穷小量都可进行阶的比较？

思考题解答

1. 不能. 因为一个变量要变得无穷小或无穷大，只有在自变量的某种变化趋势或变化状态下才能实现. 所以，任何一个定数，无论它多么小或多么大，绝不能说成是无穷小或无穷大.

2. 不一定. 考虑下面两个无限个无穷小量之和：

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+\cdots,\quad 在\ x\to 0\ 时；$$

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,\quad 在\ n\to+\infty 时.$$

请参考本书第 8 章.

3. 有. $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 以该常数为极限. 见本节定理.

4. 考虑 $\lim\dfrac{\alpha}{\gamma}$ 即可比较.

5. $\alpha \sim \gamma$.

6. 不是. 如 $x \to 0$ 时,无穷小量 $x\sin\frac{1}{x}$ 与 x^2 之比 $\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x^2}=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 的极限不存在,也没有非正常极限,故无法对它们进行阶的比较.

1.6 函数的连续性

在很多客观现象中,变量的变化都是连续的,如生物的自然增长、血液的流动、气温的变化等. 这种特性反映到函数中,就是所谓函数的连续性.

函数的连续性也是函数的重要性态,对函数的很多性质的研究都是建立在连续性的基础上的. 具有连续性的函数称为连续函数. 本书所讨论的函数,如不加声明,都是连续函数.

本节以极限为工具去认识函数的连续性. 首先介绍连续性的概念;然后讨论函数的不连续,即间断;最后介绍连续函数的性质.

1.6.1 连续的概念

变量的增量(increment)

为了描述连续性的数量特征,先引入变量增量的概念.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义,当自变量 x 在 x_0 附近取值时,称 $x-x_0$ 为**自变量 x 在 x_0 处的增量**,记为

$$\Delta x = x - x_0. \tag{1.10}$$

称相应的函数值之差 $f(x)-f(x_0)$ 为**函数 $f(x)$ 在 x_0 处的增量**,记为

$$\Delta y = f(x) - f(x_0). \tag{1.11}$$

由(1.10)可得 $x=x_0+\Delta x$,则 Δy 亦可写为

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0).$$

例 1 设函数 $y=x^2-x$. 试计算在 $x_0=2$ 处,$\Delta x=0.1, 0.01$ 时,相应的函数增量 Δy.

解 当给 x_0 以增量 Δx 时,相应的函数增量为

$$\Delta y=[(x_0+\Delta x)^2-(x_0+\Delta x)]-(x_0^2-x_0)=\Delta x(2x_0+\Delta x-1),$$

所以在 $x_0=2$ 处,$\Delta y=\Delta x(2\times 2+\Delta x-1)=\Delta x(3+\Delta x)$.

当 $\Delta x=0.1$ 时,$\Delta y=0.1(3+0.1)=0.31$;

当 $\Delta x=0.01$ 时,$\Delta y=0.01(3+0.01)=0.0301$.

可见,对函数 $y=x^2-x$ 而言,当 Δx 变化时,相应的 Δy 也要变化. 且 Δx 越小,Δy 也越小,以至 $\Delta x \to 0$ 时,$\Delta y=\Delta x(3+\Delta x)\to 0$. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 正是连续函数所具有的数量特征.

连续(continuity)的概念

首先给出函数在某点连续的定义.

定义 1　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其附近有定义，Δx，Δy 分别如(1.10)，(1.11)所示. 若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,$$

则称**函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续**.

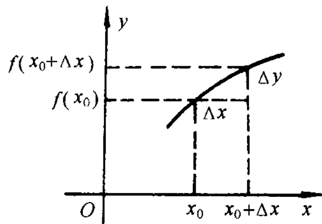


图 1.7

几何直观地看，连续函数的图像是一条连绵不断的曲线(如图 1.7)，可以一笔画出，没有跳跃，没有间断.

由(1.10)式知，$\Delta x\to 0$ 等价于 $x\to x_0$；由(1.11)式知，$\Delta y\to 0$ 等价于 $f(x)\to f(x_0)$. 因此对函数在点 x_0 处连续，有如下第二个等价定义：

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其附近有定义. 若

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0), \tag{1.12}$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

比较上述两个定义，定义 1 从几何直观的角度描述了连续函数的特征；定义 2 则便于解析地对连续函数进行数量分析，并有利于对连续函数求极限.

定义 2 中，函数在一点连续是由极限式(1.12)来刻画的，由于 $x\to x_0$ 包括了 $x\to x_0^-$ 和 $x\to x_0^+$ 两种情形，相应的连续也就有左连续和右连续.

定义 3　设函数 $y=f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0)(\delta>0)$ 内有定义，若

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 处**左连续**.

读者可仿此自行定义 $f(x)$ 在 x_0 处**右连续**.

根据本章 1.3 之定理，立即可得：

定理 1　函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处左、右连续.

由函数在一点连续可进一步推出函数在区间内连续的概念.

定义 4　若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点处都连续，则称**函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续**；若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，且在 $x=a$ 处右连续，在 $x=b$ 处左连续，则称**函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续**.

若函数 $f(x)$ 在区间 I 内连续，则称 $f(x)$ 为区间 I 内的**连续函数**，并称区间 I 为函数 $f(x)$ 的**连续区间**.

例 2　证明 $y=\sin x$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数.

证明　任取 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，要证 $\sin x$ 在 x_0 处连续，根据定义 2，只需证明

$$\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0.$$

因为 $|\sin x-\sin x_0|=2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\cdot\sin\frac{x-x_0}{2}\right|=2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|$. 由于 $x\to x_0$ 时，$\frac{x-x_0}{2}$ 充分小，故 $\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leqslant\left|\frac{x-x_0}{2}\right|$，所以

$$|\sin x-\sin x_0|\leqslant 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|=|x-x_0|$$

显然，$x\to x_0$ 时 $|x-x_0|$ 任意小，从而 $|\sin x-\sin x_0|$ 任意小，即

$$\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0.$$

可见，$\sin x$ 在点 x_0 处连续. 由于 x_0 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的任意一点，所以 $\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

在 1.3 例 5 之后曾提到，若 $f(x)$ 为基本初等函数，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，这里 x_0 为 $f(x)$ 定义域内的任意点. 所以，**基本初等函数在其定义域内连续**.

1.6.2 函数的间断点(point of discontinuity of function)

为了更深刻地理解连续函数的概念，下面讨论函数的不连续，即间断.

从函数在点 x_0 处连续之定义 2 可以分析出函数在 x_0 处连续有 3 个必要条件：

1) $f(x)$ 在点 x_0 及其附近有定义；

2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；

3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

若函数 $f(x)$ 在 x_0 处不满足上述 3 个必要条件中的任意一个，则称 $f(x)$ 在 x_0 处**间断**(discontinuity)，并称 x_0 为 $f(x)$ 的**间断点**.

例 3 讨论函数 $y=\begin{cases}x+2, & x\geqslant 0\\ x-2, & x<0\end{cases}$ 在 $x_0=0$ 处的连续性.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}y=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2$，

$\lim\limits_{x\to 0^-}y=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-2)=-2$，

而 $f(0)=2$，所以函数在 $x_0=0$ 处右连续，但不左连续，从而它在 $x_0=0$ 处不连续(图 1.8).

我们称这种函数在 x_0 处的左、右极限存在但不相等的间断点为**跳跃间断点**.

例 4 讨论函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处的连续性.

解 函数在 $x=1$ 处无定义，故它在 $x=1$ 处不连续(图 1.9).

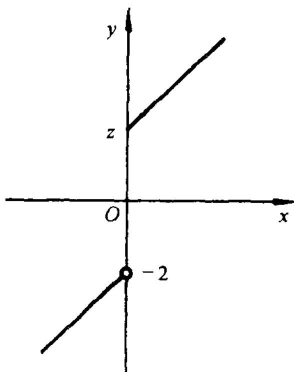


图 1.8

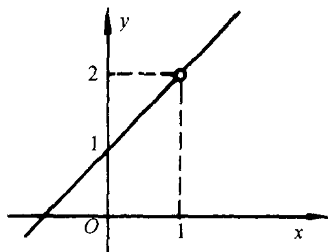


图 1.9

但$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$，若我们补充函数在 $x=1$ 处的定义 $y=2$，则新函数

$$y=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$$

在 $x=1$ 处是连续的.

例 5　讨论函数 $y=\begin{cases}|x|, x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}, x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解　由于$\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$，而 $f(0)=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0}y\neq f(0)$，故 $y=f(x)$在 $x=0$ 处不连续(图 1.10). 若改变函数在 $x=0$ 处的定义，令 $y=0$，则新函数 $y=|x|$在 $x=0$ 处连续.

以上两例间断点的共同特征是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $f(x_0)$ 不存在或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq f(x_0)$，称这类间断点为**可去间断点**. 若 x_0 为 $f(x)$的可去间断点，那么只要以 $f(x)$在 x_0 的极限值来定义或代替 $f(x)$在 x_0 的函数值，函数$f(x)$在 x_0 处就能变间断为连续.

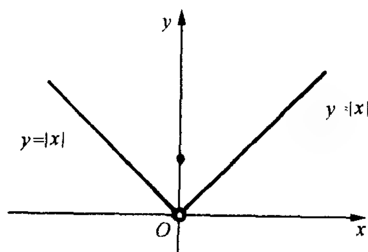


图 1.10

可去间断点和跳跃间断点统称为**第一类间断点**. 第一类间断点的基本特征是函数在点 x_0 的左右极限都存在.

函数的其他形式的间断点，即函数在点 x_0 处至少一侧的单侧极限不存在的间断点，统称为**第二类间断点**.

例 6　函数 $y=1/x^2$ 在 $x=0$ 处无定义，故间断. 由于 $x\to 0$ 时，它的左、右极限

不存在，故 $x=0$ 为 $y=1/x^2$ 的第二类间断点.

函数 $y=\sin(1/x)$ 在 $x=0$ 处显然也是第二类间断. $x\to 0$ 时，$\sin(1/x)$ 在 -1 与 1 之间无限振荡，故极限不存在.

1.6.3 连续函数的性质与初等函数的连续性

由极限的四则运算法则可推出如下定理：

定理 2 若函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 x_0 处连续，则它们的和差 $f(x)\pm g(x)$、积 $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 处均连续，且当 $g(x_0)\neq 0$ 时，它们的商 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 x_0 处也连续.

由极限的定义可推出下面的定理(证略)：

定理 3 设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 可构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$. 若 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 处连续，且 $y=f(u)$ 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 处连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处连续.

定理 3 除了表明函数的复合对连续具有"传递性"外，对于复合函数求极限还有极大的帮助. 在该定理之下，有

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)],$$

即

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)], \tag{1.13}$$

(1.13)式表明：**对连续函数求极限时，极限符号和连续函数符号可交换顺序.**

例 7 求 $\lim\limits_{x\to\sqrt{\pi}}\cos(\pi-x^2)$.

解 $\cos(\pi-x^2)$ 可看作由函数 $\cos u$ 与 $\pi-x^2$ 复合而成. $\pi-x^2$ 在 $x=\sqrt{\pi}$ 处连续，$u_0=\pi-\sqrt{\pi}^2=0$ 时 $\cos u$ 在 u_0 连续，故由(1.13)有

$$\lim_{x\to\sqrt{\pi}}\cos(\pi-x^2)=\cos(\lim_{x\to\sqrt{\pi}}(\pi-x^2))=\cos 0=1.$$

事实上，将定理 3 中复合函数的内函数 $\varphi(x)$ 在 x_0 处连续的条件降低一点，定理的结论仍然是成立的. 我们不必要求 $\varphi(x)$ 在 x_0 处连续，只要求 x_0 是 $\varphi(x)$ 的可去间断点，同时外函数 $f(u)$ 在 $u_0=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$ 处连续，则等式(1.13)依然成立. 这就是说仍然可用等式(1.13)来求复合函数的极限.

(1.13)式不仅对 $x\to x_0$ 适合，可以证明它对于 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 及 $x\to x_0^{\pm}$ 也是适合的.

例 8 求极限

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$；　　(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2-\dfrac{\sin x}{x}}$.

解 (a) 由 $\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 及对数函数的连续性(见定理 4)，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\ln e=1;$$

(b) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$，所以

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2-\frac{\sin x}{x}}=\sqrt{2-\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}}=\sqrt{2-0}=\sqrt{2}.$$

下面讨论初等函数的连续性. 若将本节例 2 后面的结论归纳为定理，则有：

定理 4　基本初等函数在其定义域内连续.

根据初等函数的构造方式及定理 2 至定理 4，紧接着有：

定理 5　初等函数在其定义域内连续.

于是，若 x_0 是初等函数 $f(x)$ 的定义域内的点，则求 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限时，便有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

例 9　求 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos x}$.

解　由于初等函数 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos x}$ 在 $x=0$ 处有定义，故

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\ln(1+x^2)}{\cos x}=f(0)=\frac{\ln(1+0^2)}{\cos 0}=0.$$

最后，给出闭区间上连续函数的 3 个重要性质：

定理 6　① 闭区间上的连续函数必有最大值 M 与最小值 m；②闭区间上的连续函数必取介于 M 和 m 之间的任何值；③ 闭区间上的连续函数必有界.

思考题

1. 变量的增量一定大于零吗?

2. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义，则 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 极限存在与 $f(x)$ 在 x_0 处连续之间的关系如何?

3. 函数 $f(x)$ 在一点连续的几何意义是什么? $f(x)$ 在某区间内连续的几何意义又是什么?

4. 求 $y=\dfrac{x}{\sin x}$ 的间断点，并分别指出它们的类型.

5. 定理 6 的结论 1) 对开区间上的连续函数还适合吗? 你能否举例说明.

思考题解答

1. 不一定. 客观地说，增量应称为改变量.

2. 前者是后者的必要条件，后者是前者的充分条件.

3. $f(x)$ 在 x_0 连续，则 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$ (Δx、Δy 分别如 (1.10)，(1.11) 式所示)；$f(x)$ 在某区间内连续，则 $y=f(x)$ 的图像在该区间上是一条连绵不断的曲线.

4. 间断点 $x=k\pi, k\in\mathbf{Z}$. 当 $k=0$ 时，为第一类间断点；当 k 为其他值时，为第二类间断点.

5. 不适合. 如函数 $y=1/x$ 在 (0,1) 区间内.

习 题 1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$； (2) $y=\arcsin(1/x)$； (3) $y=\lg(x+1)(x-4)$.

2. 函数 $y=\frac{|x|}{x}$ 与 $y=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 是否恒等？

3. 指出下列函数的定义域，并求 $f(2)$，$f(0)$ 及 $f(-2)$.

(1) $f(x)=\frac{|x-2|}{x-1}$； (2) $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & -\infty<x\leqslant 0,\\ 2^x, & 0<x<+\infty.\end{cases}$

4. 求下列函数的反函数及其定义域：

(1) $y=e^{2x}$； (2) $y=\sqrt{1-x^2}$；

(3) $y=\log_a x+b$； (4) $y=\sin 2x$.

5. 对于 1～6 个月的婴儿，由月龄估计体重的经验公式如下：

$$y=3+0.6x,$$

其中 x 表示月份，y 是体重(kg). 请指出该函数的定义域，作出其图像. 并据此估计 3 个月的婴儿标准体重为多少.

6. 有一间歇型的疟疾病人，在其发病后 10 天内，将其每天的最高体温记录于下表：

发病后的天数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
最高体温(℃)	37.0	37.3	39.7	36.5	40.2	37.0	40.1	37.0	39.3	36.8

试在平面直角坐标系中作出这些数据点，并将相邻的两点用线段连接起来. 观察作出的图形，该病人的间歇热有什么规律？

7. 判别下列函数的奇、偶性：

(1) $y=3\sin x-x^3$； (2) $y=\frac{x^4}{2}-x^2+1$；

(3) $y=\frac{a^x-1}{a^x+1}$； (4) $y=\cos(x/2)$.

8. 函数 $y=\cos^2 x$ 是否是周期函数？若是，求出其周期.

9. 函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界吗？在 $(-\infty,+\infty)$ 内的任一闭区间 $[a,b]$ 上有界吗？

10. 将方程 $\lg(x+1)+\lg(y-1)=2$ 中的隐函数化成 $y=f(x)$ 的形式.

11. 试将下面各组函数复合为一个函数，并指出其定义域：

(1) $y=\ln u, u=x^2-1$； (2) $y=u^2, u=\arcsin v, v=\sqrt{x}$.

12. 分析下列复合函数的结构：

(1) $y=e^{-x}$；　　(2) $y=\ln\cos(x^2+\sqrt{x})$；

(3) $y=2^{(3x-x^2)^2}$；　　(4) $y=3\sqrt{[1+\tan(3+\cos 5\sqrt{x})]^3}$.

13. 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$ 不存在.

14. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-6x+5}$；

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+3n-1}{3n^2+5n-1}$；　　(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$；

(7) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{\Delta x+1}-1}{\Delta x}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{x+2}{1-x^3}\right)$.

15. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x},\alpha\beta\neq 0$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan kx}{x},k\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$；

(5) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}$.

16. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{3x-3}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x},\alpha\neq 0$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

17. 设 $f(x)=\begin{cases}1/x, & x<0\\ x, & 0\leqslant x<1\\ 2, & 1\leqslant x<2\end{cases}$，试求 $f(x)$ 在 $x=0$ 及 $x=1$ 处的左、右极限.

18. 指出下列变量在指定过程中是无穷小量还是无穷大量，并说明理由.

(1) $f(n)=2n^2+1, n\to+\infty$；　　(2) $f(x)=2^{-x}-1, x\to 0$；

(3) $f(x)=\dfrac{x}{x-3}$，当 $x\to 0$ 及 $x\to 3$ 时；　　(4) $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}, x\to\pi$.

19. x^2，$\dfrac{x^2-1}{x^3}$ 和 e^x 何时为无穷小量？何时为无穷大量？

20. 比较下列各对无穷小量的阶：

(1) $\dfrac{1}{x-1},\dfrac{1}{(x-1)^2}\ (x\to\infty)$；　　(2) $x^2,\sin x\ (x\to 0)$；

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}},\dfrac{1}{\sqrt{x}}\ (x\to+\infty)$.

21. 函数 $f(x)=\begin{cases}x-a, & 0<x\leqslant 1\\ 2-x, & 1<x\leqslant 3\end{cases}$，求 $f(1+0)$ 及 $f(1-0)$. 当 a 取何值时，$f(x)$

在 $x=1$ 处连续?

22. 求下列函数的连续区间,并求极限:

(1) $f(x)=\ln(2-x)$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$;

(2) $f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$;

(3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

23. 求下列函数的间断点,并指出其类型:

(1) $y=\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$;　　(2) $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$;

(3) $y=\frac{x}{\tan x}$;　　(4) 17 题中的 $f(x)$.

24. 许多肿瘤的生长过程可用下面的函数描述:

$$V=V_0 e^{\frac{A}{a}(1-e^{-at})},$$

其中 V 表示 t 时刻的肿瘤大小(体积或重量),V_0 为开始观察($t=0$)时肿瘤的大小,a 和 A 是正常数.试分析服从该生长规律的肿瘤是否会无限制地增大.

25. 周期性给药是临床常用的给药方式.在周期性给药方式下,若按固定的时间间隔 τ 静脉注射相同剂量 D 的某药,则在第一次给药后,血药浓度 C 将升到一个最高值 C_{max},而后下降,直至下一次给药后又升到一个最高值.已知第 n 次给药后的最高血药浓度为

$$(C_{max})_n=C_0\frac{1-e^{-nk\tau}}{1-e^{-k\tau}}, n=1,2,3,\cdots$$

若重复给药进行下去,血药浓度会无限增大吗?

习题 1 答案

1. (1) $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$；　(2) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$；
   (3) $(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$.
2. 恒等.
3. (1) 定义域 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，$f(2)=0$，$f(0)=-2$，$f(-2)=-\frac{4}{3}$；
   (2) 定义域 $(-\infty,+\infty)$，$f(2)=4$，$f(0)=1$，$f(-2)=-3$.
4. (1) $y=\frac{1}{2}\ln x,\ x\in(-\infty,+\infty)$；
   (2) $[-1,1]$上没有反函数；$[0,1]$上有反函数 $y=\sqrt{1-x^2}$，$x\in[0,1]$；
   $[-1,0]$上有反函数 $y=-\sqrt{1-x^2}$，$x\in[-1,0]$；
   (3) $y=a^{x-6}$，$x\in(-\infty,+\infty)$；
   (4) $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$上有反函数 $y=\frac{1}{2}\arcsin x$，$x\in[-1,1]$.
5. 定义域$[1,6]$；图略；$y(3)=4.8$kg.
6. 该病人患的是“隔日型”疟疾.
7. (1) 奇函数；(2) 偶函数；(3) 奇函数；(4) 偶函数.
8. π.
9. 在$(-\infty,+\infty)$内无界；在$[a,b]$上有界.
10. $y=\frac{100}{x+1}+1$.
11. (1) $y=\ln(x^2-1)$，$x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$；
    (2) $y=(\arcsin\sqrt{x})^2$，$x\in[0,1]$.
12. (1) $y=e^u$，$u=-x$；　(2) $y=\ln u$，$u=\cos v$，$v=x^2+\sqrt{x}$；
    (3) $y=2^u$，$u=v^2$，$v=3x-x^2$；
    (4) $y=3\sqrt{u^3}=3u^{\frac{3}{2}}$，$u=1+\tan v$，$v=3+\cos t$，$t=5\sqrt{x}$.
13. 略.
14. (1) 1；(2) $\frac{1}{2}$；(3) $\frac{1}{3}$；(4) $\frac{1}{2}$；(5) $\frac{1}{4}$；(6) 0；(7) $\frac{1}{2}$；(8) $-\frac{2}{3}$.
15. (1) $\frac{\alpha}{\beta}$；(2) k；(3) 1；(4) $\sqrt{2}$；(5) $-\sin x$；(6) 1.
16. (1) e^2；(2) e^{-3}；(3) α；(4) e.
17. $f(0+0)=0$，$f(0-0)$不存在；$f(1+0)=2$，$f(1-0)=1$.
18. (1) 无穷大数列；　(2) 无穷小量；
    (3) $x\to0$ 时无穷小，$x\to3$ 时无穷大；　(4) $x\to\pi$ 时无穷大.

19. x^2 在 $x\to0$ 时无穷小，在 $x\to\infty$ 时无穷大；

$\frac{x^2-1}{x^3}$ 在 $x\to\pm1$ 及 $x\to\infty$ 时无穷小，$x\to0$ 时无穷大；

e^x 在 $x\to-\infty$ 时无穷小，$x\to+\infty$ 时无穷大.

20. (1) $\frac{1}{(x-1)^2}$ 较 $\frac{1}{x-1}$ 高阶；

(2) x^2 较 $\sin x$ 高阶；(3) $\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\sim\frac{1}{\sqrt{x}}$.

21. $f(1+0)=1, f(1-0)=1-\alpha; \alpha=0$.

22. (1) $(-\infty,2)$, 0；(2) $x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}, k\in\mathbf{Z}$, 1；

(3) $(-\infty,\ 2)\cup(-1,+\infty)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

23. (1) $x=2$ 为第一类间断点(可去)，$x=1$ 为第二类间断点；

(2) $x=0$ 为第一类间断点(可去).

(3) $x=k\pi, k\in\mathbf{Z}$. $k=0$ 时，$x=0$ 为第一类间断点(可去)；$k\neq0$ 时，$x=k\pi$ 为第二类间断点；$x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$ 为第一类间断点(可去).

(4) $x=1$ 为第一类间断点(跳跃)；$x=0$ 为第二类间断点.

24. 不会. 理论上极限值为 $\lim\limits_{t\to+\infty}V=V_0e^{\frac{A}{a}}$.

25. 不会. $\lim\limits_{n\to+\infty}(C_{\max})_n=\frac{C_0}{1-e^{-k\tau}}$.

第 2 章

函数的导数与微分

导数与微分是微分学的基础概念和基本组成部分. 微分学的基本内容就是系统地研究函数 $y=f(x)$是如何随自变量 x 变化的,由于研究的着眼点不同,便产生了导数与微分的概念. 导数反映出函数变量随自变量变化的相对快慢程度,可以比较简单地揭示出复杂的函数特性;而微分则指明当自变量有微小变化时,函数绝对变化的近似表示.

本章主要介绍导数与微分的概念及其运算法则,从而解决初等函数的求导问题. 至于导数的应用,将在本书下一章讨论.

2.1 导数的概念

2.1.1 导数概念的引入

导数概念来源于实际中的变化率问题. 我们不妨先考察两个具有实际意义的变化率问题:速度问题和切线问题. 这两个问题在历史上都与导数概念的形成有密切关系.

直线运动的速度

设某动点沿直线做非匀速运动. 如何理解和确定动点在某一时刻 t_0 的速度呢?

设函数 $s=f(t)$表示动点在时刻 t 所在的位置(称之为位置函数). 首先取从 t_0 到 t 这样一个时间间隔,在这段时间内,动点从位置 $s_0=f(t_0)$移动到 $s=f(t)$. 则动点在该时间间隔内的平均速度是

$$\frac{s-s_0}{t-t_0}=\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}. \tag{2.1}$$

显然,时间间隔 $t-t_0$ 越短,比值(2.1)在实践中越能说明动点在时刻t_0的速度. 当$t\to t_0$时,如果(2.1)式的极限存在,取这个极限,设为 $v(t_0)$,即

$$v(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}.$$

我们把这个极限值 $v(t_0)$称为动点在时刻 t_0 的(瞬时)速度.

切线问题

设曲线 C 的方程为 $y=f(x)$，现在我们讨论曲线上某一点 $M_0(x_0, y_0)(y_0=f(x_0))$ 处的切线问题(图 2.1).

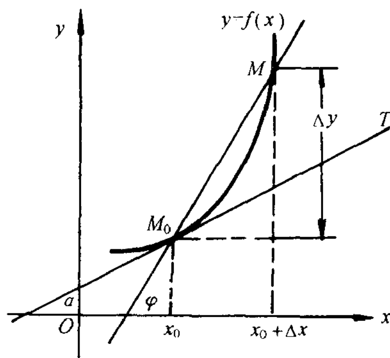


图 2.1

要确定曲线 C 在点 M_0 处的切线，只需定出切线的斜率即可. 为此，在点 M_0 外另取 C 上一点 $M(x, y)$，求得割线 M_0M 的斜率为

$$\tan\varphi=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

其中，φ 为割线 M_0M 的倾角. 当点 M 沿曲线 C 趋于点 M_0 时，$x\to x_0$，割线的极限位置就是切线. 如果当 $x\to x_0$ 时上式的极限存在，设为 k，即

$$k=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则 k 是割线斜率的极限，也就是切线的斜率. 这里 $k=\tan\alpha$，α 是切线 M_0T 的倾角. 于是，通过点 $M_0(x_0, y_0)$ 且斜率为 k 的直线 M_0T 便是曲线 C 在点 M_0 处的切线.

2.1.2 导数的定义与几何意义

导数(derivative)的定义

从上面讨论的问题可看出，非匀速直线运动的速度和切线的斜率都归结为极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \tag{2.2}$$

其中 $x-x_0$ 和 $f(x)-f(x_0)$ 分别是函数 $y=f(x)$ 的自变量增量 Δx 和函数增量 Δy：

$$\Delta x=x-x_0,$$

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

又 $x\to x_0$ 等价于 $\Delta x\to 0$，故(2.2)式又可写为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\quad 或\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

在生物医学、自然科学及工程技术的很多领域内，这类问题是广泛存在的，它们是具有不同意义的变量的变化“快慢”问题，在数学上就是所谓的函数的变化率问题. 如细胞的繁殖率、血药浓度变化率、化学反应速度、电流强度、角速度、线密度等等，都可归结为形如(2.2)的数学形式. 变化率在数学上就是导数.

定义 1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx(点 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内)时，函数 y 取得相应的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 如果增量比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限

$$\lim_{\Delta x\to x_0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to x_0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{2.3}$$

存在，则称**函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导**，并称此极限值为**函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数**，记为

$$f'(x_0)\quad 或\quad y'|_{x=x_0}\quad 或\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}.$$

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导有时也可说成是 $f(x)$ 在点 x_0 具有导数或导数存在.

根据导数定义，动点在 t_0 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$ 即是其路程函数 $f(t)$ 在 t_0 处的导数 $f'(t_0)$；曲线 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的切线斜率就是 $f'(x_0)$.

如果极限(2.3)不存在，就说函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**不可导**. 如果不可导的原因是由于 $\Delta x\to 0$ 时，比式 $\frac{\Delta y}{\Delta x}\to\infty$，为方便起见，也称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处导数为无穷大.

由于 Δx 可正可负，$\Delta x\to 0$ 包括了两种情形：$\Delta x\to 0^-$ 和 $\Delta x\to 0^+$，相应的导数也就有左导数和右导数.

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某左邻域 $(x_0-\delta,x_0)$ $(\delta>0)$ 内有定义，若左极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称**函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左可导**，并称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**左导数**，记为 $f'_-(x_0)$，即

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

同理，可定义函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**右可导**，及**右导数**：

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

函数的左导数与右导数统称为**单侧导数**(derivative on one side).

以上介绍了函数在一点处可导. 如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内的每一点处都可导，则称**函数 $f(x)$ 在开区间 I 内可导**. 这时，对区间 I 内的每一个 x，都有 $f(x)$ 的确定的导数值 $f'(x)$ 与之对应，这样就构成了一个新的函数 $y=f'(x)$，$x\in I$. 我们称该函数为 $f(x)$ 的**导函数**，记为 y'，$f'(x)$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，或 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$. 即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},x\in I.$$

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，且在 $x=a$ 处右可导，在 $x=b$ 处左可导，则称**函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导.**

显然，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的函数值. 一般地，我们把导函数 $f'(x)$ 简称为导数，而 $f'(x_0)$ 是 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数或导函数 $f'(x)$ 在 x_0 处的值.

根据导数定义可求一些简单函数的导数，其步骤可归纳如下：

(a) 求增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$；

(b) 求增量比 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$；

(c) 求极限 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

例 1 根据导数定义求函数 $y=\sqrt{x}\,(x>0)$ 的导数，并考察它在点 $x=0$ 处的导数.

解 $x>0$ 时，根据由导数定义求导的三步骤，有

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}},$$

故

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

即

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ (x>0),$$

考察 $y=\sqrt{x}$ 在点 $x=0$ 处的右导数：

$$f'_{+}(0)=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{1}{\sqrt{\Delta x}}=+\infty,$$

所以 $y=\sqrt{x}$ 在点 $x=0$ 处不可导.

同例 1 之理，可求得一些基本初等函数的导数(详见 2.2).

导数的几何意义

由切线问题和导数的定义知，几何上，**函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是函数 $y=f(x)$ 所表示的曲线在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线斜率**. 即 $f'(x_0)=\tan\alpha$，这里 α 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与 x 轴正向的夹角(图 2.1).

如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数为无穷大，这时曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处具有垂直于 x 轴的切线. 例 1 中，曲线 $y=\sqrt{x}$ 在 $x=0$ 处的切线就是 y 轴.

根据导数的几何意义并应用直线的点斜式方程，可知曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0);$$

如果 $f'(x_0)\neq 0$，法线的斜率为 $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$，从而法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

例 2 求抛物线 $y=x^2$ 在点 $(2,4)$ 处的切线方程及法线方程.

解　先求导数. 由导数定义，有

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x,$$

即

$$(x^2)' = 2x.$$

所以抛物线 $y=x^2$ 在点(2,4)处的切线斜率是 $k_1 = y'|_{x=2} = 2x|_{x=2} = 4$，切线方程是

$$y-4=4(x-2),$$

即

$$y=4x-4.$$

法线斜率是 $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{4}$，法线方程为

$$y-4=-\frac{1}{4}(x-2),$$

即

$$y=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{2}.$$

2.1.3　函数的可导性与连续性的关系

可导性与连续性是函数的两个局部性质，它们之间具有的关系如下：

设函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，即

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

存在. 由具有极限的函数与无穷小量的关系知

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

其中 α 是 $\Delta x \to 0$ 时的无穷小量. 上式可变为

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x.$$

可见，$\Delta x \to 0$ 时，$\Delta y \to 0$. 这就意味着函数在点 x 处连续. 所以，**如果函数在点 x 处可导，则函数在该点必连续**.

另一方面，**一个函数在某点连续却不一定在该点可导**. 现举例如下.

例 3　如图 2.2 所示函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，但在该点却不可导. 这是因为它在该点的左、右导数不相等：

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

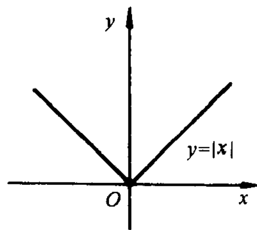


图 2.2

由以上讨论可知，函数在某点连续是函数在该点可导的必要条件，但不是充分条件.

思考题

1. 如何理解导数就是实际问题中的变化率问题.

2. 用导数表示下面的概念：

(1) 细胞数 $N(t)$的繁殖率；

(2) 药物浓度 $C(t)$的变化率.

3. 导数的定义式(2.3)也可取不同的形式，常见的有：

(1) $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$，

(2) $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

你知道这是为什么吗？

4. 如果函数 $y=f(x)$在点 x_0 处不可导，能否说曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处一定没有切线？

思考题解答

1. 导数概念就是函数变化率这一概念的精确描述. 它撇开了自变量和函数变量的各种具体意义，纯粹从数量的角度来刻画变化率的本质：函数变量增量与自变量增量之比$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$是函数变量在以 x_0 和 $x_0+\Delta x$ 为端点的区间上的平均变化率，而导数 $y'|_{x=x_0}$则是函数变量在点 x_0 处的变化率，它反应了函数变量在 x_0 处随自变量的变化而变化的快慢程度.

2. (1) $N'(t)$；　(2) $C'(t)$.

3. (1) 令 $h=\Delta x$ 可得；　(2) 令 $x=x_0+\Delta x$ 可得.

4. 不一定. 参见导数的几何意义及例 1.

2.2 基本导数公式

2.1 节中的定义 1 不仅定义了导数是什么，同时还给出了一种求导数的方法. 我们已在 2.1 节中归纳出了求导的一般步骤，本节将借此求得几类基本初等函数的导数，并且这些结果可在其他函数的求导中作为公式应用.

例 1　求常数函数 $f(x)=C$(C 是常数)的导数.

解　$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{C-C}{\Delta x}=0$，即

$$C'=0.$$

例 2　求幂函数 $f(x)=x^n$(n 为正整数)的导数.

解　先求 $f(x)=x^n$ 在 $x=a$ 处的导数：

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-1})=na^{n-1},$$

把以上结果中的 a 换成 x 得 $f'(x)=nx^{n-1}$，即得

$$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

对于一般的幂函数 $f(x)=x^a$（a 为任意常数），有

$$(x^a)'=ax^{a-1},$$

这就是幂函数的导数公式（关于它的证明参见 2.3.2 节例 9）. 利用这个公式可以方便地求出幂函数的导数，如：当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}\,(x>0)$ 的导数为

$$(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},$$

即

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

这就是前面例 1 中的结果.

当 $a=-1$ 时，$y=x^{-1}=\frac{1}{x}\,(x\neq 0)$ 的导数为

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=(-1)x^{-1-1}=-x^{-2},$$

即

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$$

例 3　求正弦函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解　$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{\Delta x}\cdot 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right]$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\right]$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$
$$=\cos x,$$

即

$$(\sin x)'=\cos x.$$

同理

$$(\cos x)'=-\sin x.$$

例 4　求指数函数 $f(x)=a^x\,(a>0, a\neq 1)$ 的导数.

解 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$,

令 $a^{\Delta x}-1=h$，则 $a^{\Delta x}=1+h$，$\Delta x=\dfrac{1}{\ln a}\ln(1+h)$. 当 $\Delta x\to 0$ 时，$h\to 0$，故

$$f'(x)=a^x\lim_{h\to 0}\frac{h}{\ln(1+h)/\ln a}=a^x\ln a\lim_{h\to 0}\frac{1}{\ln(1+h)^{1/h}}=a^x\ln a\frac{1}{\ln e}=a^x\ln a,$$

即

$$(a^x)'=a^x\ln a.$$

特别地，

$$(e^x)'=e^x.$$

例 5 求对数函数 $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq 1)$的导数.

解 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]$$

$$=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a},$$

即

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

特别地，

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

以上几个初等函数的导数可作为求导公式记住，以便在求较复杂的函数的导数时直接应用.

思考题

1. $f'(x_0)$与$(f(x_0))'$是否代表相同的意思？为什么？
2. 试推导以下函数的导数：(1) $\cos x$；(2) $\ln x$.

思考题解答

1. $f'(x_0)$是 $f(x)$在 x_0 处的导数，即函数的导函数 $f'(x)$在 x_0 处的值；而 $f(x_0)$是常数，故$(f(x_0))'=0$.

2. (1) 参见本节例 3；(2) 参见本节例 5.

2.3　函数的求导法则

前面我们根据导数的定义，求出了一些简单函数的导数. 但对于比较复杂的函数，直接根据定义求导往往是很困难的. 本节将建立一系列求导法则，以使对一般初等函数的求导更为方便.

2.3.1　函数的和、差、积、商的求导法则

本节介绍函数的和、差、积、商的求导法则.

函数的和、差的导数

定理 1　如果函数 $u(x)$ 及 $v(x)$ 在点 x 具有导数 $u'(x)$ 及 $v'(x)$，则 $u(x)\pm v(x)$ 在 x 处可导，且

$$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x).$$

证　设 $f(x)=u(x)+v(x)$，则根据导数定义有

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)]-[u(x)+v(x)]}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\\
&=u'(x)+v'(x).
\end{aligned}$$

这表明函数 $u(x)+v(x)$ 在点 x 处仍然可导，且有等式

$$f'(x)=u'(x)+v'(x),$$

即

$$[u(x)+v(x)]'=u'(x)+v'(x).$$

同理不难得到

$$[u(x)-v(x)]'=u'(x)-v'(x).$$

定理 1 可直观地表述为：**两个可导函数和(差)的导数等于这两个函数的导数的和(差)**.

这一法则可推广到任意有限个可导函数和(差)的情形. 下面以三个可导函数的和(差)为例得推论如下.

推论　如果函数 $u(x)$，$v(x)$ 及 $w(x)$ 可导，则函数 $u(x)\pm v(x)\pm w(x)$ 也可导，且

$$[u(x)\pm v(x)\pm w(x)]'=u'(x)\pm v'(x)\pm w'(x).$$

例 1　函数 $f(x)=\lg x-2^x+\cos x+e^2$ 的导数.

解　由定理 1 的推论，有

$$f'(x)=[\lg x-2^x+\cos x+e^2]'=(\lg x)'-(2^x)'+(\cos x)'+(e^2)'$$

$$=\frac{1}{x\ln 10}-2^x\ln 2-\sin x.$$

函数的积的导数

定理 2 如果函数 $u(x)$ 及 $v(x)$ 在点 x 具有导数 $u'(x)$ 及 $v'(x)$，则 $u(x)\cdot v(x)$ 在 x 处可导，且

$$[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x).$$

证 设 $f(x)=u(x)\cdot v(x)$，则由导数定义得

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x}\right.\\
&\quad\left.+\frac{u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}\right]\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]\cdot v(x+\Delta x)+u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x)\right]+\\
&\quad\lim_{\Delta x\to 0}\left[u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)+\\
&\quad u(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\\
&=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x),
\end{aligned}$$

其中 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x)$ 是因为 $v'(x)$ 存在，所以 $v(x)$ 在点 x 连续. 由此，函数在点 x 处也可导，且

$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x),$$

即

$$[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x).$$

定理 2 表明：**两个可导函数乘积的导数等于第一个因子的导数与第二个因子的乘积，加上第一个因子与第二个因子的导数的乘积.**

如果定理 2 中 $v(x)=C$（C 是常数），可得下面的推论.

推论 1 如果 $v(x)$ 可导，C 是常数，则

$$(Cv(x))'=Cv'(x).$$

即：**求一个常数与一个可导函数乘积的导数时，常数可以提到求导符号外面去.**

定理 2 的求导法则可以推广到任意有限项的情形. 仍以三个可导函数的乘积为例得推论如下.

推论 2 如果函数 $u(x),v(x)$ 及 $w(x)$ 可导，则函数 $u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)$ 也可导，且

$$[u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)]'$$
$$=u'(x)\cdot v(x)\cdot w(x)+u(x)\cdot v'(x)\cdot w(x)+u(x)\cdot v(x)\cdot w'(x).$$

例 2　求 $y=x^n\sin x$ 的导数.

解　由定理 2 得:

$$y'=(x^n\sin x)'=(x^n)'\sin x+x^n(\sin x)'$$
$$=nx^{n-1}\sin x+x^n\cos x=x^{n-1}(n\sin x+x\cos x).$$

例 3　$y=e^x(\sin x+\cos x)$,求 y' 及 $y'|_{x=\frac{\pi}{2}}$.

解　$y'=(e^x)'(\sin x+\cos x)+e^x(\sin x+\cos x)'$

$$=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)$$
$$=2e^x\cos x,$$

即

$$y'=2e^x\cos x,$$

故

$$y'|_{x=\frac{\pi}{2}}=2e^{\pi/2}\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

函数商的导数

定理 3　如果函数 $u(x)$ 及 $v(x)$ 在点 x 具有导数 $u'(x)$ 及 $v'(x)$,且 $v(x)\neq 0$,则$\frac{u(x)}{v(x)}$在 x 处可导,且

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

证　$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{v(x+\Delta x)v(x)}\times\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x)+u(x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x}\right]$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{v(x+\Delta x)v(x)}\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x)}{\Delta x}-\frac{u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}\right\}$$
$$=\frac{1}{v^2(x)}\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x)-u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]$$
$$=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)},$$

所以,函数$\frac{u(x)}{v(x)}$在 x 处也可导,且

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

该定理说明:**两个可导函数之商的导数等于分子的导数与分母的乘积,减去分**

子与分母导数的乘积,再除以分母的平方.

例 4 求 $\tan x$ 与 $\cot x$ 的导数.

解 由定理 3 得

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x,$$

即

$$\tan x=\sec^2 x.$$

同理可得

$$\cot x=-\csc^2 x.$$

定理 3 中,如 $u(x)=1$ 可得如下推论:

推论 $\left[\frac{1}{v(x)}\right]'=-\frac{v'(x)}{v^2(x)}$.

例 5 求 $\sec x$ 与 $\csc x$ 的导数.

解 由定理 3 的推论,有

$$(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}=-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}=\tan x\cdot\sec x,$$

即

$$(\sec x)'=\tan x\cdot\sec x;$$

同样的方法可得

$$(\csc x)'=-\cot x\cdot\csc x.$$

例 6 求 $y=\frac{2\ln x+x^3}{3\ln x+x^2}$的导数.

解 $$y'=\left(\frac{2\ln x+x^3}{3\ln x+x^2}\right)'=\frac{(2\ln x+x^3)'(3\ln x+x^2)-(2\ln x+x^3)(3\ln x+x^2)'}{(3\ln x+x^2)^2}$$

$$=\frac{(2/x+3x^2)(3\ln x+x^2)-(2\ln x+x^3)(3/x+2x)}{(3\ln x+x^2)^2}$$

$$=\frac{(2+3x^3)(3\ln x+x^2)-(2\ln x+x^3)(3+2x^2)}{x(3\ln x+x^2)^2}$$

$$=\frac{x(9x-4)\ln x+x^4-3x^2+2x}{(3\ln x+x^2)^2}.$$

2.3.2 复合函数的求导法则

以上我们解决了由可导函数的四则运算所构成的函数的求导问题,但我们还不知道由可导函数构成的复合函数(如 e^{-x},$\sin 2x$,$\ln\tan x$,$\csc\sqrt{1+\sqrt{x}}$ 等)是否可导;如可导,其导数如何求.

为了说明这个问题,我们先看一个例子:求 e^{-x}的导数.

已知$(e^x)'=e^x$,由 2.3.1 节定理 3 的推论知 e^{-x}可导,且

$$(e^{-x})'=(1/e^x)'=-\frac{(e^x)'}{(e^x)^2}=-\frac{e^x}{e^{2x}}=-e^{-x},$$

可见$(e^{-x})'\neq e^{-x}$.

下面的重要法则可以解决复合函数的求导问题，从而使可以求导的函数的范围得到很大扩充.

定理 4（复合函数求导法则）　设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处可导，$\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\varphi'(x_0)$，函数 $y=f(u)$ 在相应的点 $u_0=\varphi(x_0)$ 处可导，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right|_{u=u_0}=f'(u_0)$，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在点 x_0 处可导，且其导数为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right|_{u=u_0}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}.$$

证　考虑 x 在 x_0 处有增量 Δx，函数 $u=\varphi(x)$ 有相应的增量 $\Delta u=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)$，从而函数 $y=f(u)$ 也有相应的增量 $\Delta y=f(u_0+\Delta u)-f(u_0)$.

若 $\Delta u\neq 0$，有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

上式的成立是由于 $u=\varphi(x)$ 可导，故 $\varphi(x)$ 必连续，所以 $\Delta x\to 0$ 时 $\Delta u\to 0$，因此

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right|_{u=u_0}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}.$$

若 $\Delta u=0$，则有 $\Delta y=f(u_0+\Delta u)-f(u_0)=f(u_0)-f(u_0)=0$，从而 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$；同时 $\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=0$，因此等式同样成立.

根据复合函数求导法则，如果 $u=\varphi(x)$ 在开区间 I 内可导，$y=f(u)$ 在开区间 I_1 内可导，且当 $x\in I$ 时，相应的 $u\in I_1$，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在开区间 I 内可导，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \tag{2.4}$$

上式也可表示为

$$f'(\varphi(x))=f'(u)\cdot\varphi'(x),$$

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

例 7　求 $y=\sin 2x$ 的导数.

解　令 $y=\sin u, u=2x$，

则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\sin' u=\cos u,\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(2x)'=2,$$

根据复合函数求导公式(2.4)，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\cos u\cdot 2=2\cos 2x.$$

例 8 $y=\ln\tan x$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 $y=\ln u, u=\tan x$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\ln' u=\frac{1}{u},\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(\tan x)'=\sec^2 x,$$

由复合函数求导法得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}\cdot\sec^2 x=\cot x\cdot\sec^2 x=\frac{1}{\sin x\cos x}.$$

现在我们利用复合函数求导法来证明一般的幂函数导数公式(见 2.2 节例 2).

例 9 证明幂函数导数公式：$(x^a)'=ax^{a-1}$(a 为任意常数).

解 设 $y=x^a=\mathrm{e}^{a\ln x}$，令 $y=\mathrm{e}^u, u=a\ln x$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(\mathrm{e}^u)'\cdot(a\ln x)'=\mathrm{e}^u\cdot\frac{a}{x}=\mathrm{e}^{a\ln x}\cdot\frac{a}{x}=x^a\cdot\frac{a}{x}=ax^{a-1},$$

即

$$(x^a)'=ax^{a-1}.$$

以上过程熟悉后，不必写出中间变量，可直接按照法则写出求导过程.

例 10 $y=\sqrt[3]{1-2x^2}$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left[(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}\right]'=\frac{1}{3}(1-2x^2)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(1-2x^2)'=\frac{1}{3}(1-2x^2)^{-\frac{2}{3}}(-4x)$$
$$=\frac{-4x}{3\sqrt[3]{(1-2x^2)^2}}.$$

复合函数的求导法则可以推广到多个中间变量即多重复合的情形. 以两个中间变量为例：设 $y=f(u), u=\varphi(v), v=\Psi(x)$均为可导函数，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\text{而}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},$$

故复合函数 $y=f(\varphi(\Psi(x)))$的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

例 11 $y=\cos\ln x^2$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 题中函数可分解为 $y=\cos u, u=\ln v, v=x^2$. 因$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=-\sin u,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=\frac{1}{v},\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=2x$，故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=(-\sin u)\cdot\frac{1}{v}\cdot(2x)=-\sin\ln x^2\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x=-\frac{2\sin\ln x^2}{x},$$

即

$$(\cos\ln x^2)'=-\frac{2\sin\ln x^2}{x}.$$

直接按照法则写出求导过程即是：

$$(\cos\ln x^2)' = -(\sin\ln x^2)\cdot(\ln x^2)' = -(\sin\ln x^2)\cdot\frac{1}{x^2}\cdot(x^2)'$$

$$= -\frac{\sin\ln x^2}{x^2}\cdot(2x) = -\frac{2\sin\ln x^2}{x}.$$

例 12　求 $y=\sqrt{\sin^3(x^2+1)}$ 的导数.

解　$y'_x = [\sqrt{\sin^3(x^2+1)}]' = [\sin^{\frac{3}{2}}(x^2+1)]'$

$$= \frac{3}{2}[\sin^{\frac{1}{2}}(x^2+1)]\cdot[\sin(x^2+1)]'$$

$$= \frac{3}{2}[\sin^{\frac{1}{2}}(x^2+1)]\cdot[\cos(x^2+1)]\cdot(x^2+1)'$$

$$= 3x\sqrt{\sin(x^2+1)}\cos(x^2+1).$$

复合函数求导法则的关键在于正确分析函数的复合结构. 复合函数求导法在求函数导数的运算中起着极为重要的作用，同时也是后面积分法中换元积分的基础，因此是学习本课程必须牢固掌握的基本功.

以下几类求导法，都是复合函数求导法在特殊情况下的应用，本质上都是复合函数求导法.

2.3.3　隐函数的求导法

在实际问题中，有时要计算隐函数的导数. 实际上，我们不必将隐函数转化成显函数再求导，而可以直接由方程算出它所确定的函数的导数. 以下结合具体实例加以说明.

例 13　求由方程 $x^2+y^3-1=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　我们将方程两边同时对 x 求导，由于 y 是 x 的函数，所以 y^3 当然也是 x 的函数，从而 y^3 是以 y 为中间变量的 x 的复合函数. 根据复合函数求导法则，方程左边对 x 求导为

$$(x^2+y^3-1)' = 2x+3y^2\cdot y',$$

同时，方程右边对 x 求导为

$$(0)'=0,$$

由于方程两边对 x 的导数相等，就有

$$2x+3y^2\cdot y'=0,$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{2x}{3y^2},$$

其中，分式中的 y 是由方程 $x^2+y^3-1=0$ 所确定的隐函数.

通过以上过程，我们可总结出隐函数求导方法：**将隐函数方程两边同时对 x 求导，在此过程中将 y 视为 x 的函数，从而将 y 的函数视为以 y 为中间变量的 x 的复合函数，应用复合函数求导法，得到一个含 y' 的方程，由此即可解得 y'.**

例 14　已知方程 $e^y=x^2y$，求该方程所确定的隐函数的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　将方程两边同时对 x 求导，e^y 是以 y 为中间变量的 x 的复合函数，根据隐函数求导法，有

$$(e^y)'=(e^y)'_y\cdot y'=e^y\cdot y';$$

同时，

$$(x^2y)'=(x^2)'y+x^2y'=2xy+x^2y',$$

故

$$e^y\cdot y'=2xy+x^2y',$$

即

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{2xy}{e^y-x^2}.$$

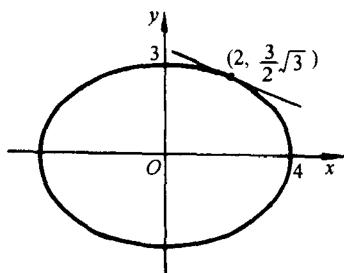


图 2.3

例 15　求椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 在点 $(2,\frac{3}{2}\sqrt{3})$ 处的切线方程(图 2.3).

解　由导数的几何意义知，所求切线的斜率为

$$k=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}.$$

将椭圆方程的两边同时对 x 求导，有

$$\frac{x}{8}+\frac{2y}{9}\cdot\frac{dy}{dx}=0,$$

故

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{9x}{16y}.$$

当 $x=2$ 时，$y=\frac{3}{2}\sqrt{3}$，代入上式得 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$. 因此，所求切线方程为

$$y-\frac{3}{2}\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-2),$$

即

$$\sqrt{3}x+4y-8\sqrt{3}=0.$$

例 16　已知方程 $xy^2-e^x+\cos y=0$，求由方程所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{dx}{dy}$.

解　方程两边同时对 x 求导得

$$(xy^2-e^x+\cos y)'_x=y^2+2xy\cdot y'-e^x-\sin y\cdot y'=0,$$

所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x-y^2}{2xy-\sin y}.$$

同理，方程两边同时对 y 求导：

$$(xy^2-e^x+\cos y)'_y=x'y^2+2xy-e^x x'-\sin y=0,$$

所以

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2xy-\sin y}{e^x-y^2}.$$

利用隐函数求导法，可以求出反三角函数的导数公式.

例 17　求反正弦导数 $y=\arcsin x$ 的导数.

解　设 $y=\arcsin x, y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. 将该式改写为 $x=\sin y$，且将其对 x 求导得

$$1=\cos y\cdot y'$$

故

$$y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

即

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

类似地可以证明 $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$，$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

在隐函数求导法的基础上，我们建立一种极为有用的求导法——对数求导法.

2.3.4　对数求导法

实际问题中，经常会遇到形如 $f(x)^{g(x)}(f(x)>0)$ 的函数，我们称其为**幂指函数**. 如果 $f(x)$，$g(x)$ 都可导，我们可以求它的导数. 求幂指函数的导数，需要利用对数进行. 下面结合实例作具体说明.

例 18　求 $y=x^{\sin x}(x>0)$ 的导数.

解　$y=x^{\sin x}$ 是幂指函数. 为了对其求导，可以先在其两边取对数，得

$$\ln y=\sin x\cdot\ln x.$$

将上式两边对 x 求导，注意 y 是 x 的函数，得

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x},$$

因而

$$y'=y\left(\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}\right)=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}\right).$$

这种先对函数取对数，再利用隐函数求导法求得函数导数的方法，称为**对数求导法**. 利用它不仅可以求得幂指函数的导数，而且在某些场合还会比用通常的求导法来得简便.

例 19　求 $y=\sqrt{\frac{x(x-5)^2}{(x^2+1)^3}}$ 的导数.

解　取对数

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln x+2\ln(x-5)-3\ln(x^2+1)],$$

对 x 求导

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}+\frac{2}{x-5}-\frac{3(2x)}{x^2+1}\right],$$

得

$$y'=\frac{y}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x-5}-\frac{6x}{x^2+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x(x-5)^2}{(x^2+1)^3}}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x-5}-\frac{6x}{x^2+1}\right).$$

通过对2.2节和2.3节的学习,我们已了解了所有基本初等函数的导数公式,它们是求初等函数导数的基础;还了解了求函数导数的基本法则,它们是求初等函数导数必须遵循的法则.有了这些导数公式和求导法则,初等函数的求导问题便可以迎刃而解.因此,熟练掌握它们是本门课程的重要基本功.本书在此将这些公式与法则总结如下,以便复习和记忆.

基本初等函数的导数公式

1) $C'=0$,
2) $(x^a)'=ax^{a-1}$,
3) $(\sin x)'=\cos x$,
4) $(\cos x)'=-\sin x$,
5) $(\tan x)'=\sec^2 x$,
6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$,
7) $(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$,
8) $(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$,
9) $(a^x)'=a^x\ln a$,
10) $(e^x)'=e^x$,
11) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$,
12) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$,
13) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
14) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
15) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$,
16) $(\text{arccot}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

函数的和、差、积、商的求导法则

设 $u=u(x)$,$v=v(x)$都可导,则

1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$,
2) $(Cu)'=Cu'$,
3) $(uv)'=u'v+uv'$,
4) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$,$(v\neq 0)$.

复合函数的求导法则

设 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$,且 $y=f(u)$及 $u=\varphi(x)$都可导,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$的导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\quad 或\quad y'(x)=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

思考题

1. 证明导数公式:

(1) $(\cot x)'=-\csc^2 x$;　　(2) $(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$;

(3) $(\text{arccot}x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

2. 下列求导结果正确吗？为什么？

(1) $(x^2\sin x)'=2x\cos x$；　　(2) $(\cos 2x)'=-\sin 2x$；

(3) $\ln y=1+x^2$，两边对 x 求导得 $\dfrac{1}{y}=2x$；

(4) $[(\tan x)^x]'=x(\tan x)^{x-1}$；　　(5) $[(\tan x)^x]'=(\tan x)^x\ln\tan x$.

思考题解答

1. (1) 参见本节例 4；(2) 参见本节例 5；(3) 参见本节例 17.

2. (1) 错. 由本节定理 2，$(x^2\sin x)'=(x^2)'\sin x+x^2(\sin x)'=\cdots$；

   (2) 错. 由本节定理 4(复合函数求导法)，$(\cos 2x)'=-\sin 2x\cdot(2x)'=\cdots$；

   (3) 错. 由隐函数求导法，$\dfrac{1}{y}y'=2x$；

   (4) 错. 对幂指函数 $y=f(x)^{g(x)}$ 求导数，需先将两边取对数再求导. 参见本节例 18；

   (5) 错. 同上.

2.4　高 阶 导 数

简单地说，高阶导数就是导函数的导数. 示例如下：

变速直线运动的瞬时速度 $v(t)$ 是位置函数 $s(t)$ 对时间 t 的变化率，即导数

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\quad 或 \quad v=s',$$

而其加速度 a 是速度 v 对时间 t 的变化率：

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)\quad 或 \quad a=(s')'.$$

我们称这种导数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)$ 或 $(s')'$ 为 s 对 t 的二阶导数.

一般地说，$f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍是 x 的函数，我们将 $y'=f'(x)$ 的导数称为 $y=f(x)$ 的**二阶导数**(second derivative)，记为 $f''(x)$ 或 y'' 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，即

$$f''(x)=[f'(x)]'\ 或\ y''=(y')'\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right);$$

同样，我们将 $f''(x)$ 的导数称为 $y=f(x)$ 的**三阶导数**，记为 $f'''(x)$ 或 y''' 或 $\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$，即

$$f'''(x)=[f''(x)]'\quad 或\quad y'''=(y'')'\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right);$$

类似地，有四阶导数

$$f^{(4)}(x)=[f'''(x)]'\quad 或\quad y^{(4)}=(y''')'\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}\right);$$

一般地，如果函数的 $n-1$ 阶导数 $f^{(n-1)}(x)$ 存在，则称 $n-1$ 阶导数的导数为 n 阶导数，即

$$f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]' \quad 或 \quad y^{(n)}=(y^{(n-1)})' \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right).$$

二阶及二阶以上的导数统称为**高阶导数**(higher derivative).

由此可见，求函数的高阶导数只是对函数进行逐次求导，在方法上并未增加新内容. 所以，仍可用前面的求导方法来求得函数的高阶导数.

例 1 求 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的二阶导数.

解 $y'=\dfrac{(x+\sqrt{x^2+1})'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,

$$y''=(y')'=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\left[(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right]'=\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}(2x)$$

$$=-\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}.$$

例 2 求 $y=3x^3+2x^2+x+1$ 的各阶导数.

解 $y'=(3x^3+2x^2+x+1)'=9x^2+4x+1$,

$y''=(y')'=(9x^2+4x+1)'=18x+4$,

$y'''=(y'')'=(18x+4)'=18$,

$y^{(4)}=(y''')'=18'=0$,

且

$y^{(n)}=0,(n\geqslant 5)$.

容易证明，对 n 次多项式

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

有

$y'=a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$,

$y''=a_0n(n-1)x^{n-2}+a_1(n-1)(n-2)x^{n-3}+\cdots+2a_{n-2}$,

……

$y^{(n)}=a_0n!$,

$y^{(k)}=0\ (k>n)$.

一些函数的 n 阶导数表达式很有规律.

例 3 求 $y=\sin x$ 的 n 阶导数.

解 $y=\sin x$,

$y'=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$y''=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$y'''=\cos\left(x+2\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$,

……

一般地，$y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$，即

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

类似地，可求得

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

思 考 题

1. 用导数表示以下概念：
   (1) 曲线 $y=f(x)$ 的切线斜率的变化率；
   (2) 细胞数量 $N=N(t)$ 的增长率的变化速度.
2. 验证函数 $y=e^x\sin x$ 满足关系式 $y''-2y'+2y=0$.

思考题解答

1. (1) $\frac{d^2y}{dx^2}$；　(2) $\frac{d^2N}{dt^2}$.
2. 求出 y',y''，将其代入方程即可.

2.5　函数的微分

对微分概念的研究起源于求函数增量的近似表达式. 在很多实际问题中，我们需要了解当自变量在 x_0 处有增量 Δx 时，相应的函数增量 Δy 如何表达. 这里，

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

从上式来看，Δy 的表达式似乎不难求得. 但在实际问题中，计算 $f(x_0)$ 很难，计算 $f(x_0+\Delta x)$ 就更难了. 能否找到一种简便的方法能计算或近似地计算 Δy？需要什么条件？

事实上，若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$，从而

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha\quad(\alpha \text{ 为 } \Delta x\to 0 \text{ 时的无穷小量}),$$

即

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x \tag{2.5}$$

可见，Δy 由两部分组成：

(a) $f'(x_0)\Delta x$：它是 Δx 的线性表达式，称之为 Δy 的**线性主要部分**；

(b) $\alpha\Delta x$：　它是 Δx 的高阶无穷小，在 $\Delta x\to 0$ 时可以忽略不计.

显然，我们感兴趣的是 Δy 的线性主要部分 $f'(x_0)\Delta x$，它在 Δx 充分小时可以近似地代替 Δy，我们称之为 $f(x)$ 的微分.

2.5.1 微分(Differential)的概念与微分的几何意义

微分的概念

定义 1 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，称导数 $f'(x_0)$ 与自变量增量 Δx 之积 $f'(x_0)\Delta x$ 为**函数 $f(x)$ 在点 x_0 处关于 Δx 的微分**，记为

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x.$$

如果 $f(x)$ 在点 x_0 处有微分，则称**函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微**. 如果 $f(x)$ 在区间 I 内的每一个点处都可微，则称**函数 $f(x)$ 在区间 I 内可微**(differentiable)，记为

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x, x \in I.$$

例如，$y=x^2$ 在点 x_0 处关于 Δx 的微分是

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x=(x^2)'|_{x=x_0}\Delta x=2x_0\Delta x,$$

因此，x^2 在点 x_0 处可微；显然，x^2 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可微，$\mathrm{d}y=2x\Delta x$.

可见，函数的微分是 Δx 的线性表达式，它与函数的增量是不同的概念. 函数的微分是函数增量的近似表示，它与函数的增量一般不相等，只有在特殊情况下才相等.

例 1 求函数 $y=x$ 的微分，并证明对自变量 x 而言，$\mathrm{d}x=\Delta x$.

解 根据定义 1，$\mathrm{d}y=y'_x\Delta x=x'\Delta x=\Delta x$；

由于 $y=x$，故 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$，而 $\mathrm{d}y=\Delta x$，所以

$$\mathrm{d}x = \Delta x,$$

这表明**自变量的增量等于自变量的微分**.

因此，微分也可表示为

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x. \tag{2.6}$$

若将上式改写为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$，函数的导数就是函数的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量微分 $\mathrm{d}x$ 的商，故导数又称为**微商**.

由定义 1 知，**可导的函数一定可微；反之亦然**.

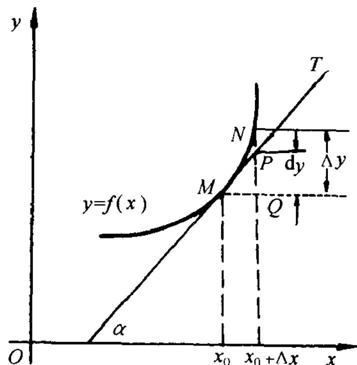


图 2.4

微分的几何意义

为了对微分有比较直观的了解，我们说明一下微分的几何意义.

设函数 $y=f(x)$ 的图形如图 2.4 所示. 在点 x_0 处，曲线上对应点 $M(x_0,y_0)$. 当自变量 x 有微小增量 Δx 时，就得到曲线上另一个点 $N(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$.

从图 2.4 可知

$$MQ=\Delta x,$$

$$QN=\Delta y,$$

过点 M 做曲线的切线 MT，其倾角为 α，则

$$QP = MQ \cdot \tan\alpha = \Delta x \cdot f'(x_0),$$

即

$$\mathrm{d}y = QP.$$

所以，**当 Δy 是曲线上的点的纵坐标的增量时，$\mathrm{d}y$ 就是曲线的切线上的点的纵坐标的增量**，这就是微分的几何意义.

由(2.5)式可知，当 $|\Delta x|$ 很小时，$|\Delta y - \mathrm{d}y|$ 比 $|\Delta x|$ 小得多. 因此在点 x_0 的附近，我们可用切线段来近似地代替曲线段. 换言之，在一定条件下我们可用直线来近似地代替曲线.

2.5.2　基本初等函数的微分公式与运算法则

从函数的微分表达式(2.6)可知，计算函数的微分，实际上是计算函数的导数，再乘以自变量的微分. 因此，由基本初等函数的导数公式与运算法则，立即可得基本初等函数的微分公式与运算法则.

基本初等函数微分公式

1) $\mathrm{d}(C)=0$,　　2) $\mathrm{d}(x^{\alpha})=\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$,

3) $\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x$,　　4) $\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$,

5) $\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\mathrm{d}x$,　　6) $\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\mathrm{d}x$,

7) $\mathrm{d}(\sec x)=\sec x\tan x\mathrm{d}x$,　　8) $\mathrm{d}(\csc x)=-\csc x\cot x\mathrm{d}x$,

9) $\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\mathrm{d}x$,　　10) $\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$,

11) $\mathrm{d}(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$,　　12) $\mathrm{d}(\ln x)=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$,

13) $\mathrm{d}(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$,　　14) $\mathrm{d}(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$,

15) $\mathrm{d}(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$,　　16) $\mathrm{d}(\mathrm{arccot}\, x)=-\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

微分的运算法则

设 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 都可导，则

1) $\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$;

2) $\mathrm{d}(u\cdot v)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$;　$\mathrm{d}(Cu)=C\mathrm{d}u$ (C 是常数);

3) $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}$　$(v\neq 0)$.

例 2　$y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\arctan x}$，求 $\mathrm{d}y$.

解　由函数商的微分法则，有

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\arctan x}\right)=\frac{\arctan x\cdot \mathrm{d}\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\cdot \mathrm{d}\arctan x}{(\arctan x)^2}$$

$$=\frac{\arctan x\cdot \mathrm{e}^x\mathrm{d}x-\mathrm{e}^x\cdot\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x}{(\arctan x)^2}=\frac{\mathrm{e}^x}{\arctan x}\left[1-\frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\right]\mathrm{d}x.$$

上例也可通过先求导数 y'，再求微分 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x$.

复合函数微分法则——一阶微分形式不变性(invariant of differential form)与

复合函数的求导法则相应的复合函数微分法则是：

设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$都可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$的微分可推导如下：

$$dy = y'_x dx = f'(u)\varphi'(x)dx.$$

由于 $\varphi'(x)dx=du$，所以

$$dy = f'(u)du,$$

这就是说，**对函数 $y=f(u)$而言，无论 u 是自变量还是中间变量，其微分形式 $dy=f'(u)du$ 保持不变**. 我们称函数微分的这一性质为**一阶微分形式不变性**. 函数微分的这一重要性质不仅能求复合函数的微分，也是积分学中换元积分法的重要基础.

例 3 $y=\sin(2x+1)$，求 dy.

解 把 $2x+1$ 看成中间变量 u，利用微分形式不变性，则

$$\begin{aligned} dy &= d(\sin u)=\cos u \cdot du=\cos(2x+1)d(2x+1)=\cos(2x+1)\cdot 2dx \\ &= 2\cos(2x+1)dx. \end{aligned}$$

在求复合函数的微分时，只要认清复合函数的结构，就可以利用微分形式不变性逐步求出函数的微分.

例 4 $y=\ln\cos\sqrt{x}$，求 dy.

解
$$\begin{aligned} dy &= d(\ln\cos\sqrt{x})=\frac{1}{\cos\sqrt{x}}d(\cos\sqrt{x}) \\ &= \frac{1}{\cos\sqrt{x}}(-\sin\sqrt{x})d\sqrt{x}=-\tan\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx. \end{aligned}$$

例 5 $y=e^{1-3x}\sin x^2$，求 dy.

解
$$\begin{aligned} dy &= d(e^{1-3x}\sin x^2)=\sin x^2\cdot de^{1-3x}+e^{1-3x}\cdot d\sin x^2 \\ &= \sin x^2 e^{1-3x}d(1-3x)+e^{1-3x}\cos x^2 d(x^2) \\ &= \sin x^2 e^{1-3x}(-3)dx+e^{1-3x}\cos x^2(2x)dx=e^{1-3x}(2x\cos x^2-3\sin x^2)dx. \end{aligned}$$

例 6 在下列等式左端的括号中填入适当的函数，使等式成立.

1) $d(\quad)=xdx$； 2) $d(\quad)=\sin\omega t dt$.

解 1) 由于 $d(x^2)=2xdx$，所以

$$xdx = \frac{1}{2}d(x^2) = d(x^2/2),$$

即

$$d(x^2/2)=xdx.$$

一般地，有 $d(x^2/2+C)=xdx$ （C 为任意常数）.

2) 因为 $d(\cos\omega t)=-\omega\sin\omega t dt$，所以

$$\sin\omega t dt=-\frac{1}{\omega}d(\cos\omega t)=d\left(-\frac{\cos\omega t}{\omega}\right),$$

即

$$d\left(-\frac{\cos\omega t}{\omega}\right)=\sin\omega t dt.$$

一般地，有 $d\left(-\frac{\cos\omega t}{\omega}+C\right)=\sin\omega t dt$ （C 为任意常数）.

2.5.3　由参数方程所确定的函数的导数

当函数由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \Psi(t) \end{cases} \quad t \in (\alpha,\beta)$$

确定时,在不消去 t 的情况下,利用微分可以求出 y 对 x 的导数$\dfrac{dy}{dx}$,过程如下:

$$dy=\Psi'(t)dt, \qquad dx=\varphi'(t)dt,$$

由于导数$\dfrac{dy}{dx}$就是微商,故

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\Psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Psi'(t)}{\varphi'(t)}, \tag{2.7}$$

这就是由参数方程所确定的函数的导数公式.

例 7　求由参数方程所确定的函数$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$的导数$\dfrac{dy}{dx}$.

解　由公式(2.7),有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(t - \arctan t)'}{[\ln(1 + t^2)]'} = \frac{1 - \dfrac{1}{1 + t^2}}{\dfrac{2t}{1 + t^2}} = \frac{t^2}{2t} = \frac{t}{2},$$

即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t}{2}.$$

例 8　设 $x=R\cos t, y=R\sin t$,求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{R\cos t dt}{-R\sin t dt}=-\cot t$,

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{\csc^2 t dt}{-R\sin t dt}=-\dfrac{1}{R\sin^3 t}$.

思 考 题

1. 已知 $y=x^3-x^2$,计算在 $x=2$ 处当 Δx 分别取 1,0.1,0.01 时的 Δy 及 dy. 你能从结果中分析出什么结论吗?

2. 将适当的函数填入下列括号内,使等式成立:

(1) $d\left(\dfrac{3}{2}x^2\right)=(\qquad)dx$,　　(2) $d(e^{1-x^2})=(\qquad)dx$,

(3) $d[A\sin(\omega t+\varphi)]=(\qquad)dt$,　　(4) $d(\tan 3x)=(\qquad)dx$,

(5) d(　　　)$=2\mathrm{d}x$，　(6) d(　　　)$=\dfrac{1}{1+2x}\mathrm{d}x$，

(7) d(　　　)$=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，　(8) d(　　　)$=x\csc^2 x^2\mathrm{d}x$.

思考题解答

1. 当 $\Delta x=1$ 时，$\Delta y=18$，$\mathrm{d}y=11$；

当 $\Delta x=0.1$ 时，$\Delta y=1.161$，$\mathrm{d}y=1.1$；

当 $\Delta x=0.01$ 时，$\Delta y=0.110601$，$\mathrm{d}y=0.11$.

比较各 $|\Delta y-\mathrm{d}y|$，可得出结论.

2. (1) $3x$，　(2) $-2xe^{1-x^2}$，

(3) $A\omega\cos(\omega t+\varphi)$，　(4) $3\sec^2 3x$，

(5) $2x+C$，　(6) $\dfrac{1}{2}\ln(1+2x)+C$，

(7) $2\sqrt{x}+C$，　(8) $-\dfrac{1}{2}\cot x^2+C$.

习　题　2

1. 设 $y=10x^2$，试按导数定义求 $f'(-1)$.

2. 设 $f(x)=3x+1$，试按导数定义求 $f'(x)$.

3. 假定 $f'(x_0)$存在，按照导数定义观察下列极限，指出 A 表示什么：

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，其中 $f(0)=0$，且 $f'(0)$存在.

4. 利用基本导数公式求下列函数的导数：

(1) $y=x^3$；　(2) $y=\sqrt[3]{x^2}$；　(3) $y=x^{1.6}$；

(4) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x}}$；　(5) $y=\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$；　(6) $y=\dfrac{x^2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}$.

5. 求曲线 $y=\sqrt{x}$ 在点(1,1)处的切线方程.

6. 求曲线 $y=\sin x$ 在具有下列横坐标的各点处切线的斜率：

$$x=\frac{2}{3}\pi;\qquad x=\pi.$$

7. 求曲线 $y=\cos x$ 在点$(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2})$处的切线方程和法线方程.

8. 在抛物线 $y=x^2$ 上取横坐标为 $x_1=1$ 及 $x_2=3$ 的两点，做过这两点的割线. 问该抛物线上哪一点的切线平行于这条割线？

9. 已知物体的运动规律为 $s=t^3(m)$，求这物体在 $t=2(s)$时的速度.

10. 若电流通过一导体的电量 Q 与时间 t 的函数关系为 $Q=Q(t)$，怎样确定该导体在时间 $t=t_0$ 时的电流强度？

11. 讨论函数 $y=|\sin x|$在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

12. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ ax+b, & x>1,\end{cases}$ 为了使函数在 $x=1$ 处连续且可导，a，b 应取什么值？

13. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 求 $f'_+(0)$及 $f'_-(0)$，由此判断 $f'(0)$是否存在.

14. 求下列函数的导数：

(1) $y=3x^2-\dfrac{2}{x^2}+5$；　(2) $y=5x^3-2^x+3e^x$；

(3) $y=(1+\sqrt{x})(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1)$；　(4) $y=2\tan x+\sec x-1$；

(5) $y=x^2\ln x$；　(6) $y=3e^x\cos x$；

(7) $y=(2+3x)(4-7x)$；　(8) $y=3a^x-\dfrac{2}{x}$；

(9) $y=\frac{1}{\ln x}$；

(10) $y=\frac{1}{1+x+x^2}$；

(11) $y=\frac{x-1}{x+1}$；

(12) $y=\frac{1+\sin t}{1+\cos t}$；

(13) $y=(x-a)(x-b)(x-c)$（a、b、c 为常数）；

(14) $y=x^2\ln x\cos x$；

(15) $y=\frac{2\csc x}{1+x^2}$；

(16) $y=\frac{2\ln x+x^3}{3\ln x+x^2}$.

15. 求下列函数在给定点的导数：

(1) $y=\sin x-\cos x$，求 $y'|_{x=\frac{\pi}{6}}$ 和 $y'|_{x=\frac{\pi}{4}}$；

(2) $\rho=\varphi\sin\varphi+\frac{1}{2}\cos\varphi$，求 $\left.\frac{d\rho}{d\varphi}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}$；

(3) $f(x)=\frac{3}{5-x}+\frac{x^2}{5}$，求 $f'(0)$ 和 $f'(2)$.

16. 写出曲线 $y=x-\frac{1}{x}$ 与 x 轴交点处的切线方程.

17. 求下列函数的导数：

(1) $y=(2x+5)^4$；

(2) $y=\cos(4-3x)$；

(3) $y=e^{-3x^2}$；

(4) $y=e^{-x}(x^2-2x+3)$；

(5) $y=\ln(1+x^2)$；

(6) $y=\sin^2 x$；

(7) $y=\arctan x^2$；

(8) $y=\sqrt{a^2-x^2}$；

(9) $y=(\arcsin x)^2$；

(10) $y=(\arctan\frac{x}{2})^2$；

(11) $y=\log_a(x^2+x+1)$；

(12) $y=\arccos\frac{1}{x}$；

(13) $y=\ln\tan\frac{x}{2}$；

(14) $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$；

(15) $y=\sin^n x\cdot\cos nx$；

(16) $y=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$；

(17) $y=\arctan\frac{x+1}{x-1}$；

(18) $y=\ln[\ln(\ln x)]$；

(19) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$；

(20) $y=x\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$；

(21) $y=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arccot} x$；

(22) $y=\arccos\frac{2t}{1+t^2}$.

18. 求由下列方程所确定的隐函数的导数$\frac{dy}{dx}$：

(1) $y^2-2xy+9=0$；

(2) $x^3+y^3-3axy=0$；

(3) $xy=e^{x+y}$；

(4) $y=1-xe^y$；

(5) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$；

(6) $e^{xy}+y\ln x=\cos 2x$.

19. 用对数求导法求下列函数的导数：

(1) $y=(x)^x$；

(2) $y=(\ln x)^x$；

(3) $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$；　　(4) $y=(1+x^2)^{\sin x}$；

(5) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$；　　(6) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

20. 求下列函数的微分：

(1) $y=\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}$；　　(2) $y=x\sin 2x$；

(3) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$；　　(4) $y=[\ln(1-x)]^2$；

(5) $y=\mathrm{e}^{-x}\cos(3-x)$；　　(6) $y=\tan^2(1+2x^2)$.

21. 求下列参数方程所确定的函数的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

(1) $\begin{cases}x=at^2,\\ y=bt^3;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x=\dfrac{t^2}{2},\\ y=1-t;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=\theta(1-\sin\theta),\\ y=\theta\cos\theta;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=t-\arctan t;\end{cases}$

22. 已知$\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\sin t,\\ y=\mathrm{e}^t\cos t.\end{cases}$求当 $t=\dfrac{\pi}{3}$时$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$的值.

23. 求下列函数的二阶导数：

(1) $y=2x^2+\ln x$；　　(2) $y=x\cdot\mathrm{e}^{x^2}$；

(3) $y=\mathrm{e}^{t}\sin t$；　　(4) $y=\arccos(\sin x)$；

(5) $y=(1+x^2)\arctan x$；　　(6) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

(7) $\begin{cases}x=\dfrac{t^2}{2},\\ y=1-t;\end{cases}$　　(8) $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t.\end{cases}$

24. 求下列函数的指定阶的导数：

(1) $y=x\mathrm{e}^x$，求 $y^{(n)}$；　　(2) $y=x\ln x$，求 $y^{(n)}$；

(3) $y=\sin^2 x$，求 $y^{(n)}$；　　(4) $y=x\cos x$，求 $y^{(4)}$.

25. 求曲线$\begin{cases}x=2\mathrm{e}^t\\ y=\mathrm{e}^{-t}\end{cases}$在 $t=0$ 相应的点处的切线方程.

习题 2 答案

1. -20.

2. 3.

3. (1) $-f'(x_0)$； (2) $f'(0)$.

4. (1) $3x^2$； (2) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$； (3) $1.6x^{0.6}$； (4) $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$；

   (5) $\frac{1}{8}x^{-\frac{7}{8}}$； (6) $\frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$.

5. $x-2y+1=0$.

6. $k_1=y'|_{x=\frac{2}{3}\pi}=-\frac{1}{2}$；$k_2=y'|_{x=\pi}=-1$.

7. 切线方程：$\frac{\sqrt{3}}{2}x+y-\frac{1}{2}(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi)=0$；

法线方程：$\frac{2\sqrt{3}}{3}x-y+\frac{1}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi=0$.

8. (2,4).

9. 12(m/s).

10. 电流强度：$I=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t},I(t_0)=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0}$.

11. 在 $x=0$ 处连续，不可导.

12. $a=2$，$b=-1$.

13. $f'_+(0)=0,f'_-(0)=-1,f'(0)$不存在.

14. (1) $6x+\frac{4}{x^3}$； (2) $15x^2-2^x\ln2+3e^x$； (3) $-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\frac{1}{x})$；

    (4) $\sec x(2\sec x+\tan x)$； (5) $x(2\ln x+1)$； (6) $3e^x(\cos x-\sin x)$；

    (7) $-x(21x+1)$； (8) $3a^x\ln a+\frac{2}{x^2}$； (9) $-\frac{1}{x(\ln x)^2}$；

    (10) $-\frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}$； (11) $\frac{2}{(x+1)^2}$； (12) $\frac{1+\sin t+\cos t}{(1+\cos t)^2}$；

    (13) $(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$；

    (14) $2x\ln x\cos x+x\cos x-x^2\ln x\sin x$；

    (15) $\frac{-2\csc x[(1+x^2)\cot x+2x]}{(1+x^2)^2}$； (16) $\frac{x(9x-4)\ln x+x^4-3x^2+2x}{(3\ln x+x^2)^2}$.

15. (1) $y'|_{x=\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2},y'|_{x=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$； (2) $\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\frac{\pi}{2})$；

    (3) $f'(0)=\frac{3}{25}$，$f'(2)=\frac{17}{15}$.

16. $2x-y-2=0$ 和 $2x-y+2=0$.

17\. (1) $8(2x+5)^3$;　(2) $3\sin(4-3x)$;　(3) $-6xe^{-3x^2}$;

(4) $e^{-x}(-x^2+4x-5)$;　(5) $\frac{2x}{1+x^2}$;　(6) $\sin 2x$;

(7) $\frac{2x}{1+x^4}$;　(8) $-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$;　(9) $\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(10) $\frac{4}{4+x^2}\arctan\frac{x}{2}$;　(11) $\frac{2x+1}{(x^2+x+1)\ln a}$;　(12) $\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$;

(13) $\csc x$;　(14) $\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$;　(15) $n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$;

(16) $\frac{4}{(e^t+e^{-t})^2}$;　(17) $-\frac{1}{1+x^2}$;　(18) $\frac{1}{x\ln x[\ln(\ln x)]}$;

(19) $\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;　(20) $\arcsin\frac{x}{2}$;　(21) $\frac{x^2}{1-x^4}$;

(22) $y'=\begin{cases}-\frac{2}{1+t^2}, & t^2<1,\\ \frac{2}{1+t^2}, & t^2>1.\end{cases}$

18\. (1) $\frac{y}{y-x}$;　(2) $\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$;　(3) $\frac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}$;

(4) $-\frac{e^y}{1+xe^y}$;　(5) $\frac{x+y}{x-y}$;　(6) $-\frac{2x\sin 2x+y+xye^{xy}}{x^2e^{xy}+x\ln x}$。

19\. (1) $x^x(1+\ln x)$;　(2) $(\ln x)^x\left[\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right]$;

(3) $\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\left(\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}\right)$;　(4) $(1+x^2)^{\sin x}\left[\cos x\ln(1+x^2)-\frac{2x\sin x}{1+x^2}\right]$;

(5) $\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+5)^5}\left[\frac{1}{2(x+2)}-\frac{4}{3-x}-\frac{5}{x+1}\right]$;

(6) $\frac{x^4+6x^2+1}{3x(1-x^4)}\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

20\. (1) $\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$;　(2) $(\sin 2x+2x\cos 2x)dx$;　(3) $(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}dx$;

(4) $\frac{2\ln(1-x)}{x-1}dx$;　(5) $e^{-x}[\sin(3-x)-\cos(3-x)]dx$;

(6) $8x\tan(1+2x^2)\sec^2(1+2x^2)dx$.

21\. (1) $\frac{3b}{2a}t$;　(2) $-\frac{1}{t}$;　(3) $\frac{\cos\theta-\theta\sin\theta}{1-\sin\theta-\theta\cos\theta}$;　(4) $\frac{t}{2}$.

22\. $\sqrt{3}-2$.

23\. (1) $4-\frac{1}{x^2}$;　(2) $2xe^{x^2}(3+2x^2)$;　(3) $-2e^{-t}\cos t$;　(4) 0;

(5) $2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}$;　(6) $-\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$;　(7) $\frac{1}{t^3}$;　(8) $-\frac{1}{a^2\sin^3 t}$.

24\. (1) $e^x(x+n)$;　(2) $(-1)^n\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$　$(n\geqslant 2)$;

(3) $2^{n-1}\sin\left[2x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]$;　(4) $-4e^x\cos x$.

25\. $x+2y-4=0$.

第 3 章

导数与微分的应用

3.1 拉格朗日中值定理

定理 1 设函数 $y=f(x)$满足：

1) 在闭区间$[a,b]$上连续；

2) 在开区间(a,b)内可导，

则在开区间(a,b)内至少存在一个点 $\xi\in(a,b)$，使得下面的等式成立：

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi) \tag{3.1}$$

定理 1 叫做拉格朗日中值定理(Lagrange mean-value theorem).

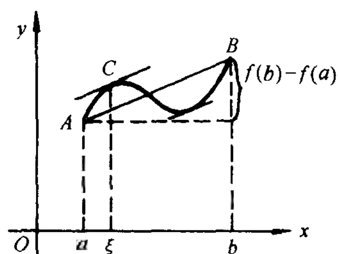


图 3.1

下面对定理 1 从几何图形上给予直观解释. 从图 3.1 可以看出，当 $y=f(x)$满足条件 1)和 2)时，平行移动割线 AB，直到它成为图形上某一点 $C(\xi,f(\xi))$的切线为止. 据导数的几何意义知道，过 C 点的切线的斜率是 $f'(\xi)$，而割线 AB 的斜率是$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，故(3.1)式成立.

从物理上解释，如果 $y=f(t)$表示作变速直线运动的一物体在时刻 t 时的位移，则瞬时速率为 $f'(t)$. 该物体在时间间隔为 $\Delta t=b-a$ 内的平均速率是$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 据定理 1，存在 $\xi\in(a,b)$，使得在 $t=\xi$ 时的瞬时速率 $f'(\xi)$等于平均速率.

在医学领域中，各动力学所讨论的某些变量的变化过程中，据定理 1 可知，至少有一个时刻的瞬时变化率等于平均变化率. 这就是 Lagrange 中值定理在医学中的实际意义.

但美中不足的是，定理 1 只肯定了点$(\xi,f(\xi))$的存在性，至于确定点 ξ 的确切

位置，需寻求其他方法来解决.

3.2　导数在求函数极限中的应用

如果当 $x\to a$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 同时趋于零（或趋于无穷大），那么，函数极限 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 可能存在，也可能不存在. 通常把这种极限式叫做不定式，并分别简记为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$. 例如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}$ 就是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式. 对于这类不能用商的极限法则来计算的函数极限，L'Hospital（洛必达）法则为我们提供了简便而有效的方法.

定理 2　L'Hospital 法则

如果　1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$（或 ∞）；

2) $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 在 a 点附近均存在，且 $g'(x)\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或无穷大），

则
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{3.2}$$

若新表达式仍为不定式，且满足定理 2 的条件，可继续使用该法则.

例 1　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{2x}}{\cos x}=2$.

例 2　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}=\dfrac{3}{2}$.

注意，例 2 中 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}$ 已不是不定式，不可再应用 L'Hospital 法则，否则将导致错误结果. 在使用 L'Hospital 法则时要注意这一点.

对于 $x\to\infty$ 时的不定式 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，定理 2 仍然有效.

例 3　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}\ (n>0,x>0)$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{nx^n}=0$.

例 4　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}\qquad(n\in\mathbf{N},\lambda>0)$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2e^{\lambda x}}=\cdots$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0$.

例 3 和例 4 说明，当 $x\to+\infty$ 时，虽然对数函数 $\ln x$，幂函数 x^n 和指数函数 $e^{\lambda x}$

都趋于正无穷大，但指数函数增长较快，幂函数次之，对数函数较慢.

除了上述两种不定式类型外，还有不定式 $0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,1^\infty,\infty^0$ 等. 它们均可转化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型.

例 5 求 $\lim\limits_{x\to 0+0} x\cdot\ln x$ （$0\cdot\infty$型）.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{\infty}{\infty}型\right)=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0+0}(-x)=0.$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$ （$\infty-\infty$型）.

解

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\left(\frac{0}{0}型\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{xe^x+e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{xe^x+2e^x}=\frac{1}{2}.$$

例 7 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{m}{x}\right)^x$ （$m\in\mathrm{R}$）（1^∞型）.

解

$$原式=\lim_{x\to\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{m}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{m}{x}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{m}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}\left(\frac{0}{0}型\right)=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{m}{1+\frac{m}{x}}}=e^m.$$

特别地，当 $m=1$ 时，导出重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

例 8 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ （$\frac{\infty}{\infty}$型）.

解 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\left(\dfrac{\infty}{\infty}型\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

回到了题目的原来形式，说明 L'Hospital 法则在例 8 中失效，需要寻求其他方法来解决问题. 用 e^{-x}乘分子和分母，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1.$$

3.3 微分在近似计算中的应用

如果函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导，当$|\Delta x|<<1$ 时，有

$$\Delta y\approx dy=f'(x_0)\Delta x,$$

即

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x,$$

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x. \tag{3.3}$$

利用公式(3.3)可以近似地计算复杂函数在 $x=x_0+\Delta x$ 处的函数值.

例 9　对某疾病用某放射性元素进行放射治疗. 已知该放射性元素的存在量 $M=M(t)$（单位：mg）与时间 t（单位：h）的函数关系为

$$M(t)=M_0e^{-2.0782t},$$

其中 M_0 为放射性元素的初始量. 若 $M_0=30$ mg，问经过 5 分钟后 $M(t)=?$

解　$M'(t)=-2.0782M_0e^{-2.0782t}$

$t_0=0, \Delta t=5 \text{ min}=0.0833 \text{ h}$,

$t=t_0+\Delta t=0.0833 \text{ h}$,

$M(t_0)=M(0)=M_0, M'(t_0)=M'(0)=-2.0782M_0$,

$$\begin{aligned}M(t)&=M(t_0+\Delta t)\approx M(t_0)+M'(t_0)\Delta t\\&=M_0-2.0782M_0\Delta t\\&=30-2.0782\times30\times0.0833\\&\approx24.8066 \text{ mg}.\end{aligned}$$

即经过 5 分钟，该放射性元素还剩 24.8066 mg.

3.4　导数在判别函数单调性方面的应用

定理 3　如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 内可导，则

1) 在 (a,b) 内 $f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ 在 (a,b) 内单调上升；

2) 在 (a,b) 内 $f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ 在 (a,b) 内单调下降.

证　设在 (a,b) 内，$f'(x)>0$. 对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，由 Lagrange 中值定理，有 $\xi\in(x_1,x_2)$，满足

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi),$$

因为　　$f'(\xi)>0, x_2-x_1>0$,

所以　　$f(x_2)-f(x_1)>0$.

故函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调上升.

同理可证 $f'(x)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调下降.

例 10　讨论函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调性.

解　$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$；

$f'(x)=0$ 的点：$x=1, x=2$.

列表讨论如下：

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	1	↗

例 11　讨论 $f(x)=\ln|x^2-1|$ 的单调性.

解　$f(x)$ 无定义的点：$x=1, x=-1$；

$f(x)$的定义域为：$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$；

$|x|>1$ 时：$f'(x)=[\ln(x^2-1)]'=\dfrac{2x}{x^2-1}$

$|x|<1$ 时：$f'(x)=[\ln(1-x^2)]'=\dfrac{2x}{x^2-1}$

$f'(x)=0$ 的点：$x=0$；

$f'(x)$在 $f(x)$定义域内无定义的点：无.

列表讨论如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	↘		↗	0	↘		↗

3.5 导数在求函数极值方面的应用

3.5.1 极值的概念

定义 设函数 $f(x)$在 x_0 的某邻域内有定义，如果对该邻域内任意的 $x(x\neq x_0)$均有

$$f(x_0)<f(x),$$

则称 $f(x)$在点 x_0 取得极小值(relative minimum)$f(x_0)$，而点 x_0 称为 $f(x)$的极小值点.

如果对该邻域内任意 $x(x\neq x_0)$均有

$$f(x_0)>f(x),$$

则称 $f(x)$在点 x_0 取得极大值(relative maximum)$f(x_0)$，而点 x_0 称为 $f(x)$的极大值点.

函数的极大值和极小值统称为极值(extremum)，函数的极大值点和极小值点统称为极值点.

如例 10 中的函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的极值点是 $x=1$ 和 $x=2$，极值是 $f(1)=2$ 和 $f(2)=1$. 其中 $f(1)=2$ 是极大值，$f(2)=1$ 是极小值.

由定义可知，函数 $f(x)$的极大值与极小值是局部概念. 函数 $f(x)$在其定义域内可能有若干个极值，某个极大值亦有可能小于某个极小值. 读者自行画图验证.

3.5.2 极值的求法

定理 4 （可导函数极值存在的必要条件） 设函数 $y=f(x)$在 x_0 处有极值，且 $f'(x_0)$存在，则 $f'(x_0)=0$.

该定理在几何图形上的直观解释是：一个可导函数 $f(x)$在取得极值处的曲线的切线是水平的.

要注意的是：一个函数 $f(x)$在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$不存在，$f(x_0)$亦有可能是极

值. 如 $y=f(x)=|x|$ 在 $x_0=0$ 处的导数 $f'(0)$ 不存在，但 $f(0)=0$ 是 $y=f(x)=|x|$ 的极小值. 于是，有如下判别定理.

定理 5　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 邻域内可导，且 $f'(x_0)=0$（或 $f'(x_0)$ 不存在），当 x 递增变动经过点 x_0 时：

1) 若 $f'(x)$ 由负变正，则 $f(x)$ 在点 x_0 处有极小值 $f(x_0)$；

2) 若 $f'(x)$ 由正变负，则 $f(x)$ 在点 x_0 处有极大值 $f(x_0)$；

3) 若 $f'(x)$ 的符号不变，则 $f(x)$ 在点 x_0 处就没有极值.

例 12　求 $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+2$ 的极值.

解　$f(x)$　的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；

$f'(x)=x^3-2x^2+x=x(x-1)^2$；

$f'(x)=0$ 的点：$x=0, x=1$；

$f'(x)$　不存在的点：无.

据定理 5 进行判定，列表如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值 $f(0)=2$	↗	不是极值	↗

故 $x=0$ 是极小值点，极小值为 $f(0)-2$.

例 13　求 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(x-5)$ 的极值.

解　$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；

$f'(x)=\dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\dfrac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{5}{3}(x-2)x^{-\frac{1}{3}}$；

$f'(x)=0$ 的点：$x=2$；

$f'(x)$ 不存在的点：$x=0$.

列表判定如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	不存在	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值 $f(0)=0$	↘	极小值 $f(2)=-3\sqrt[3]{4}$	↗

故 $x=0$ 是极大值点，极大值 $f(0)=0$；$x=2$ 是极小值点，极小值 $f(2)=-3\sqrt[3]{4}$.

定理 6　设 $f(x)$ 在点 x_0 处有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，那么：

1) 若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x_0)$ 为极小值；

2) 若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x_0)$ 为极大值；

3) 若 $f''(x_0)=0$，则不能判定 $f(x_0)$ 是否是极值.

若出现情况 3)，称为定理 6 失效. 可以用定理 5 或极值的定义来判定.

例 14 试用定理 6 来判定例 12 中 $f(x)$的极值.

解 $f''(x)=3x^2-4x+1$,

$f''(0)=1>0$,故 $f(0)=2$ 是 $f(x)$的极小值;

$f''(1)=3-4+1=0$,定理 6 失效.

而例 12 中用定理 5 判定 $f(1)$不是 $f(x)$的极值.

3.6 导数在求函数的最大值与最小值方面的应用

在医学科研和实验中,常常涉及到求函数的最大值与最小值问题.

求函数 $y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上的最大(小)值的步骤如下:

1) 求出 $f(x)$在(a,b)上 $f'(x)=0$ 的点和 $f'(x)$不存在的点处的函数值;

2) 求出 $f(a)$和 $f(b)$;

3) 找出以上数中的最大(小)者.

例 15 求 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 在$[-4,4]$上的最大值和最小值.

解 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$,

$f'(x)=0$ 的点:$x=-1,x=3$;

$f'(x)$不存在的点:无.

因为 $f(-1)=10,f(3)=-22,f(-4)=-71,f(4)=-15$,所以 $f(x)$的最大值是 $f(-1)=10$,最小值是 $f(-4)=-71$.

在解决实际问题时,常常根据问题的性质,判定函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上是取最大值(或最小值),这时如果计算出 $f'(x)=0$ 的点只有一个,那么这个点便一定是函数 $f(x)$的最大值(或最小值).

例 16 按 1 mg/kg 的比率给小鼠注射磺胺药物后,小鼠血液中磺胺药物的浓度可表示为

$$y=f(t)=-1.06+2.59t-0.77t^2,$$

其中,y 表示血液中磺胺浓度(g/100L),t 表示注射后经历的时间(min).问 t 为多少时,y 达到最大值?

解 $f'(t)=2.59-1.54t$,

令 $f'(t)=0$,计算得 $t=1.682$ (min),

$f(1.682)=1.118$ (g/100L)

所以当 $t=1.682$ min 时,血液中磺胺浓度达到最大值 1.118 g/100L.

3.7 应用导数判别曲线的凹凸性及拐点

为了研究函数变化的特性和快速准确地作出函数的图像,必须研究曲线的弯曲方向以及曲线在哪些点改变了弯曲方向.关于曲线的弯曲方向,用曲线与其切线的相对位置来描述.在图 3.2 中曲线位于切线的上方,把这一段曲线叫做凹的

(Concave)；在图 3.3 中曲线位于切线的下方，把这一段曲线叫做凸的(Convex).

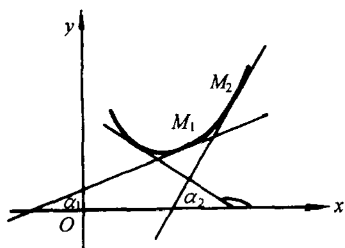


图 3.2

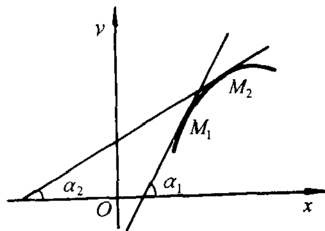


图 3.3

从图 3.2 可以看出，曲线为凹状时，随着 x 的增大，函数 $f(x)$的斜率 $\tan\alpha = f'(x)$也在增大，即 $f'(x)$是单调上升的. 如果 $f(x)$的二阶导数 $f''(x)$存在，则必有 $f''(x)>0$. 同理可知，当曲线为凸状时，如果 $f(x)$的二阶导数 $f''(x)$存在，则必有 $f''(x)<0$.

曲线凹凸部分的分界点称为曲线的拐点(point of inflection).

于是得到曲线凹凸性及拐点的判别法则：

定理 7　设函数 $y=f(x)$在(a,b)内二阶可导，

1) 在(a,b)内，若 $f''(x)>0$，则曲线 $y=f(x)$在(a,b)内是凹的；

2) 在(a,b)内，若 $f''(x)<0$，则曲线 $y=f(x)$在(a,b)内是凸的.

3) 在 x_0 附近，$f''(x)$改变符号，则点$[x_0,f(x_0)]$是曲线 $y=f(x)$的拐点.

例 17　求曲线 $y=e^{-x^2}$的凹凸区间及拐点.

解　函数定义域为$(-\infty,+\infty)$；

$y'=-2xe^{-x^2}$；

$y''=2(2x^2-1)e^{-x^2}$.

$y''=0$ 的点：$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$；

y''不存在的点：无.

列表讨论如下：

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$
y''	+	0	−	0	+
y	凹	拐点	凸	拐点	凹

上表说明 y 在区间$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$和$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$内是凹的，在$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

内是凸的. 有两个拐点$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$和$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

3.8 应用导数快速作出函数的图像

在医学科研和实验中,常常需要作出函数的图像. 用描点法可以作出函数的图像,但描点法所选取的点不可能太多,且不一定能选取到一些关键性的点(如拐点和极值点),因而不能较准确地表示函数的图像. 利用学过的导数知识,就能快速准确地作出函数的图像. 步骤如下:

1) 确定函数 $y=f(x)$的定义域,讨论奇偶性、对称性、周期性;

2) 利用 $y'=f'(x)$确定函数的单调区间、极值点;

3) 利用 $y''=f''(x)$确定函数的凹凸区间、拐点;

4) 利用极限确定函数的渐近线(Asymptote):

若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$,则 $y=b$ 是 $y=f(x)$的水平渐近线;

若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$,则 $x=a$ 是 $y=f(x)$的垂直渐近线,

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=a(a\neq0)$且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$,则 $y=ax+b$ 是$y=f(x)$的斜渐近线;

5) 找出必要的辅助点(如曲线与坐标轴的交点等).

例 18 描绘出 $y=e^{-x^2}$的图像(此函数在数理统计中有重要作用).

解 定义域$(-\infty,+\infty)$,$f(-x)=f(x)$;

$y'=-2xe^{-x^2}$,$y'=0$ 的点:$x=0$,y'不存在的点:无;

$y''=2(2x^2-1)e^{-x^2}$,$y''=0$ 的点:$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$,

y''不存在的点:无;

$\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x^2}=0$,$y=0$ 是函数的水平渐近线,$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=0$,函数无斜渐近线.

列表讨论如下:

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$	0	$\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$
y'	+		+	0	−		−
y''	+	0	−		−	0	+
y	⌒	拐点	⌒	极大值	⌒	拐点	⌒

极大值:$y(0)=1$,拐点值:$y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{e}}$. 作图 3.4.

例 19 描绘口服、肌注血药浓度模型

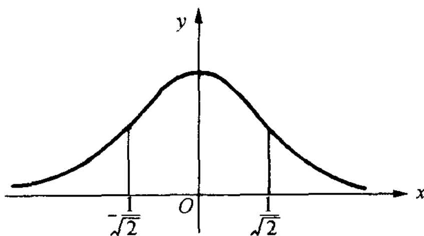


图 3.4

$$C(t)=\frac{A(e^{-\sigma_1 t}-e^{-\sigma_2 t})}{\sigma_2-\sigma_1}$$

的图像. 其中 A,σ_1,σ_2 为正常数且 $\sigma_2>\sigma_1$.

解　定义域$(0,+\infty)$;

$$C'(t)=\frac{A(\sigma_2 e^{-\sigma_2 t}-\sigma_1 e^{-\sigma_1 t})}{\sigma_2-\sigma_1},$$

$C'(t)=0$ 的点: $t_1=\frac{1}{\sigma_2-\sigma_1}\ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$,

$C'(t)$ 不存在的点: 无;

$$C''(t)=\frac{A(\sigma_1^2 e^{-\sigma_1 t}-\sigma_2^2 e^{-\sigma_2 t})}{\sigma_2-\sigma_1},$$

$C''(t)=0$ 的点: $t_2=\frac{2}{\sigma_2-\sigma_1}\ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$,

$C''(t)$ 不存在的点: 无;

$\lim\limits_{t\to+\infty}C(t)=0$, $y=0$ 是 $C(t)$的水平渐近线;

$\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{C(t)}{t}=0$, $C(t)$无斜渐近线.

列表如下:

t	$(0,t_1)$	t_1	(t_1,t_2)	t_2	$(t_2,+\infty)$
$C'(t)$	+	0	−		−
$C''(t)$	−		−	0	+
$C(t)$	↗	极大值	↘	拐点	↘

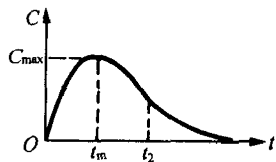


图 3.5

$C(t)$的最大值 $C(t_1)=\frac{A}{\sigma_1}(\frac{\sigma_2}{\sigma_1})^{\frac{\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_2}}$　(令 $t_m=t_1$);

$C(t)$的拐点值 $C(t_2)=\frac{A(\sigma_1+\sigma_2)}{\sigma_1^2}(\frac{\sigma_2}{\sigma_1})^{\frac{2\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_2}}$.

作图 3.5.

习 题 3

1. 验证 $f(x)=\arctan x$ 在[0,1]上是否满足拉格朗日中值定理.若满足,$\xi=$?
2. 利用拉格朗日中值定理证明 $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$.
3. 利用罗必达法则求下列极限:

   (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$,　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$,

   (3) $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$,　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{a}{x})^x$.
4. 利用微分计算下列各式的近似值

   (1) $e^{1.010}$　(2) $\arctan 1.020$
5. 讨论下列函数的单调性:

   (1) $y=x-\ln(1+x)$,(2) $y=x-\ln x$,

   (3) $y=\arctan x-x$.
6. 求下列函数的极值:

   (1) $f(x)=2x^3-3x^2+1$,(2) $f(x)=x-\ln(1+x)$,

   (3) $f(x)=2x^3-6x^2-18x+10$,

   (4) $f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x+20$.
7. 求下列函数的最大值与最小值:

   (1) $y=2x^3-3x^2+5\quad x\in[-1,4]$,

   (2) $y=x+\sqrt{1-x}\quad x\in[-5,1]$.
8. 水中氢离子浓度和氧离子浓度的乘积为 10^{-14},问应有怎样的氢离子浓度时,氢离子浓度和氧离子浓度之和为最小?
9. 在某化学反应中,反应速度 V 与反应物的浓度 x 的关系为

$$V=kx(a-x),$$

其中 a 是反应开始时反应物的浓度,k 是反应速率常数,问 x 为何值时反应速度最大?

10. 求下列函数的凹凸区间及拐点并描绘出图形:

    (1) $y=xe^{-x}$,　(2) $y=\ln(1+x^2)$.

习题 3 答案

1. $\xi^2=\frac{4}{\pi}-1$
2. 考查函数 $f(t)=\sin t\quad t\in[x,y]$.
3. (1) -2，　(2) 3，　(3) 1，　(4) e^a.
4. (1) 提示　$e^{1.010}=e^{1+0.010}$；
   (2) 提示　$\arctan 1.020=\arctan(1+0.020)$.
5. (1) $x\in(-1,0)$时单调下降，$x\in(0,+\infty)$时单调上升；
   (2) $x\in(0,1)$时单调下降，$x\in(1,+\infty)$时单调上升；
   (3) 在$(-\infty,+\infty)$内单调下降.
6. (1) 极大值 $f(0)=1$，极小值 $f(1)=0$；
   (2) 极小值 $f(0)=0$；
   (3) 极大值 $f(-1)=20$；极小值 $f(3)=-44$；
   (4) 极大值 $f(1)=11$，极大值 $f(2)=12$，极小值 $f(3)=11$.
7. (1) $\max f(x)=f(4)=80$，$\min f(x)=f(-1)=0$；
   (2) $\max f(x)=f(\frac{3}{4})=\frac{5}{4}$，$\min f(x)=f(-5)=-5+\sqrt{6}$.
8. 10^{-7}
9. $V(\frac{a}{2})=\frac{ka^2}{4}$
10. (1) $x\in(-\infty,2)$时曲线凸，$x\in(2,+\infty)$时曲线凹，拐点$(2,2e^{-2})$；
    (2) $x\in(-1,1)$时曲线凹，$x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$时曲线凸，拐点是$(-1,\ln 2)$和$(1,\ln 2)$.

第 4 章

不定积分

本章介绍不定积分的概念、性质和计算方法.

4.1 不定积分的概念

前面介绍了导数和微分的概念，它们是对函数(曲线)进行微观分析的方法，若已知曲线 $F(x)$，研究曲线在点 x 处的斜率，即求其导数 $F'(x)$. 不定积分则是一个相反的问题，是从微观到宏观的一种研究方法，即由斜率 $f(x)$ 求曲线 $F(x)$. 又如：质点在时刻 t 的运动速度 $v(t)$ 表示了质点运动的微观特性，其运动的轨迹方程 $s(t)$ 表示了质点运动的整体特性，由 $s(t)$ 求 $v(t)$ 是求导数，即 $s'(t)=v(t)$；由 $v(t)$ 求 $s(t)$ 是求不定积分. 因此，不定积分实际上是已知某函数的导数，求该函数. 它可以理解为导数运算的逆运算.

4.1.1 不定积分的定义

定义 1 若 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，$[F(x)+C]$ 为 $f(x)$ 的不定积分(Indefinite Integral). 记

$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$（$C$ 为任意常数），

其中符号 $\int$ 称为积分号，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，$f(x)$ 称为被积函数，x 为积分变量.

由定义可知，$f(x)$ 的原函数有无穷多个，即 $[F(x)+C]$；将导数公式逆向观察，可以写出对应的不定积分公式：

① $\int 0\mathrm{d}x=C$，

② $\int x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$，

③ $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$,

④ $\int a^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}a^x+C$,

⑤ $\int e^x\mathrm{d}x=e^x+C$,

⑥ $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$,

⑦ $\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$,

⑧ $\int \sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$,

⑨ $\int \csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$,

⑩ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$,

⑪ $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x+C$,

⑫ $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$,

⑬ $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$.

以上基本积分公式应该熟记，切忌与求导公式混淆. 需要说明的是：

1）公式③中由于当 $x<0$ 时，$[\ln(-x)]'=\frac{1}{-x}(-x)'=\frac{1}{x}$，故当 $x<0$ 时有 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(-x)+C$，与 $x>0$ 的情况合并即为公式 3).

2）当 $f(x)$在(a,b)内连续，则 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 存在，但不一定能用初等函数表示出来.

例 1　用定义验证 $\int \mathrm{e}^x\cos\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\sin\mathrm{e}^x+C$

解　因为$(\sin\mathrm{e}^x+C)'=\mathrm{e}^x\cos\mathrm{e}^x$，故

$$\int \mathrm{e}^x\cos\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\sin\mathrm{e}^x+C.$$

例 2　求 $F(x)=\frac{1}{(2x+1)}$的导数，然后按不定积分的定义写出相应的不定积分表达式.

解　$F'(x)=-\frac{2}{(2x+1)^2}=f(x)$，故

$$\int\left[-\frac{2}{(2x+1)^2}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{(2x+1)}+C$$

4.1.2　不定积分的几何意义

由不定积分的定义可知，求函数 $f(x)$的不定积分即是求满足$[F(x)+C]'=f(x)$的函数族 $y=F(x)+C$，由于 $y=F(x)+C$ 表示一族曲线，取不同的 C 值，曲线的位置就不同，其中每条曲线在点 x 处的切线的斜率都为 $f(x)$. 因此，从几何

上理解,函数 $f(x)$ 的不定积分即是由曲线 $y=F(x)$ 沿 y 轴方向上下平移而得到的一族曲线,它们在点 x 处的斜率为 $f(x)$,这族曲线叫做函数 $f(x)$ 的积分曲线族(Family of Integral Curves). 在实际问题中,按一定的条件取某一个特殊的 C 值,得到其中一条积分曲线.

例 3 求通过点(1,5),且曲线上任一点 x 处的斜率为 $2x$ 的曲线方程.

解 由题意斜率为 $2x$ 的全部曲线为

$$y=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C,$$

当 $x=1$ 时,$y=5$,故 $5=1+C$,得 $C=4$.

故所求曲线为 $y=x^2+4$.

4.1.3 不定积分的性质

从不定积分的定义和导数的性质,可得到不定积分的如下性质:

1) $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)$,$\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$;

$\int g'(x)\mathrm{d}x=g(x)+C$,$\int \mathrm{d}g(x)=g(x)+C$;

2) $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$,$k$ 为非零常数;

3) $\int [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$.

证明从略.

利用以上性质,按积分公式可直接计算一些简单的积分.

例 4 $\int (8x^2+5x^6-x^7)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}x^3+\frac{5}{7}x^7-\frac{1}{8}x^8+C$.

例 5 $\int (\tan^2x-\sqrt{x}-1)\mathrm{d}x=\int (\sec^2x-\sqrt{x}-2)\mathrm{d}x=\tan x-\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2x+C$.

例 6 $\int \frac{1+2x+x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int \frac{2x+(1+x^2)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int \frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=2\arctan x+\ln|x|+C$.

例 7 $\int \sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{2}(1-\cos x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x-\sin x)+C$.

思考题

1. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^{2x}+C$,则 $f(x)=$?

2. 若 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数,它们之间的关系怎样? 由此可得出什么结论?

思考题解答

1. $f(x)=(xe^{2x}+C)'=e^{2x}+2xe^{2x}$.
2. 因为$[G(x)-F(x)]'=f(x)-f(x)=0$,故$[G(x)-F(x)]=C$.
   $G(x)=F(x)+C$.

由此可知,若 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数,则 $F(x)+C$ 是 $f(x)$的全体原函数,亦即 $f(x)$的不定积分为它的全体原函数.

4.2　换元积分法

积分法是积分学的一个极为重要的内容,它是学习定积分、广义积分和微分方程等内容的基础,方法比较灵活,需要一定的技巧,因此积分法的学习极具吸引力和趣味性. 换元积分法(integration by substitution)是利用复合函数求导法则,对被积表达式作适当的变型,从而利用公式进行积分的方法. 据变换的过程不同,可分为两类.

4.2.1　第一换元法

请看实例:

求 $\int \cos 2x\mathrm{d}x$,由于$\left(\frac{1}{2}\sin 2x+C\right)'=\cos 2x$,按定义,结果应为$\frac{1}{2}\sin 2x+C$,而不是 $\sin 2x+C$. 为什么?因为 $\cos 2x$ 是一个复合函数,必须改变其结构,才能直接用积分公式,方法如下:

$$\int \cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \cos 2x\mathrm{d}(2x)\xlongequal{u=2x}\frac{1}{2}\int \cos u\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\sin u+C=\frac{1}{2}\sin 2x+C.$$

推广到一般情形有

定理 1(第一换元法)　设 $u=\varphi(x)$可导,$F'(u)=f(u)$,则$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C=F(\varphi(x))+C$.

证明　由复合函数的求导法则,有$[F(\varphi(x))]'=f(\varphi(x))\varphi'(x)$. 而 $\varphi'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$,再由不定积分的定义即有

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C=F(\varphi(x))+C.$$

例 8　$\int \sin x^2 2x\mathrm{d}x\xlongequal{u=x^2}\int \sin u\mathrm{d}u=-\cos u+C=-\cos x^2+C.$

如果不写出中间变量 u,其运算过程可写为

$$\int \sin x^2 2x\mathrm{d}x=\int \sin x^2\mathrm{d}(x^2)=-\cos x^2+C.$$

从上例可以看出解题的关键是找出新的微元 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}\varphi(x)=\varphi'(x)\mathrm{d}x$,故第一换元法也称为凑元法,以下再举几个例题熟悉此种方法,请注意解题时可以不写出

du，只需清楚 u 表示什么.

例 9 $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx = 2\int e^{\sqrt{x}} d(\sqrt{x}) = 2e^{\sqrt{x}} + C.$

本题中 $u=\sqrt{x}$，解题过程中省略了.

例 10 $\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}} d(\frac{x}{2}) = \int \frac{d(\tan\frac{x}{2})}{\tan\frac{x}{2}}$

$$= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right| + C = \ln|\csc x - \cot x| + C.$$

由于 $\cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$，利用上题结果，可得 $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln|\sec x + \tan x| + C.$

例 11 $\int \tan^3 x dx = \int \tan x(\sec^2 x - 1)dx = \int \tan x \sec^2 x dx - \int \tan x dx$

$$= \int \tan x d(\tan x) + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C.$$

例 12 $\int \frac{dx}{(x+a)^2} = \int \frac{d(x+a)}{(x+a)^2} = -\frac{1}{(x+a)} + C.$

从以上例题可知，用第一换元法解题时，既要熟悉微分公式，能凑出微元，使等式成立，又要熟悉积分公式，使得凑元后的表达式可以利用积分公式，其中便蕴涵着解题的乐趣和成就感. 为提高解题技巧，希望读者特别注意以下两方面：

(a) 观察下面各积分表达式中，为直接利用积分公式，在括号内所填的微元：

$\int \sqrt{\sin x} d(\sin x)$，

$\int \frac{1}{1+\ln^2 x} d(\ln x)$，

$\int \cos e^x d(e^x)$，

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x}} d(\sqrt{x})$ 或 $\int \frac{1}{\sqrt{1-x}} d(1-x)$，

$\int \frac{2}{3x+5} d(3x+5)$，

$\int 8^{3x} d(3x)$.

(b) 观察表达式的括号中所凑成的微元：

$\sin x dx = d(-\cos x)$，

$\frac{1}{x} dx = d(\ln x)$，

$\frac{1}{e^x} dx = d(-e^{-x})$.

解题时同时运用这两种技巧即可得心应手. 如

$\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \int \frac{d\ln x}{1+\ln^2 x} = \arctan\ln x + C.$

4.2.2　第二换元法

先举一个实例：

例 13　求 $\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

解　本题无对应的积分公式可用，设 $x=\sin t$，则 $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$.

$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t=\int \cos^2 t\mathrm{d}t=\int \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}t+\frac{\sin 2t}{4}+C=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C.$$

推广到一般情形有

定理 2(第二换元法)　设 $x=\varphi(t)$是单调可微函数，且 $\varphi'(t)\neq 0$，若

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=\Phi(t)+C,$$

则 $\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=\Phi(t)+C=\Phi[\varphi^{-1}(x)]+C.$

用不定积分定义即可证明，此处略.

例 14　求 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x\quad(a>0)$

解　设 $x=a\tan t$，$\mathrm{d}x=a\sec^2 t\mathrm{d}t$，$\sqrt{x^2+a^2}=a\sec t$，因此

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x=\int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\mathrm{d}t=\int \sec t\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+C.$$

由假设 $x=a\tan t$，容易得 $\tan t=\frac{x}{a}$，$\sec t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$，

故 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right|+C=\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|+C.$

例 15　求 $\int \frac{1}{2+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

解　设 $\sqrt{x}=t$，即 $x=t^2$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

$$\int \frac{1}{2+\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int \frac{2t}{2+t}\mathrm{d}t=2\int \frac{t+2-2}{2+t}\mathrm{d}t=2(t-2\ln|t+2|)+C$$

$$=2(\sqrt{x}-2\ln|\sqrt{x}+2|)+C.$$

例 16　求 $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$

解　设 $x=\frac{1}{t}$，则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$(当 $x>1$).

$$\text{原式}=\int \frac{-1}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\mathrm{d}t=-\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=-\arcsin t+C=-\arcsin\frac{1}{x}+C.$$

当 $x<-1$ 时，设 $x=-\frac{1}{t}$，可得相同结果.

从以上例题可以看出，无论是第一换元法还是第二换元法，其目的都是将被积函数转化成具有与公式相同的形式，熟记公式的重要性也就不言而喻了.

利用换元积分法读者不难验证以下不定积分公式：

⑭ $\int \tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$，

⑮ $\int \cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$，

⑯ $\int \sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C$，

⑰ $\int \csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$，

⑱ $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C=-\frac{1}{a}\mathrm{arc\ cot}\frac{x}{a}+C$，

⑲ $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$，

⑳ $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{a}+C=-\arccos\frac{x}{a}+C$，

㉑ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C$，

㉒ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$.

解题时可直接使用以上公式.

思考题

1. 改正下列错误：

(1) 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，则 $\int f[g(x)]\mathrm{d}x=F[g(x)]+C$.

(2) $\int(1-\sin x^2)\mathrm{d}x^2=x+\cos x^2+C$.

(3) $\int \cos^3 x\mathrm{d}x=-\frac{1}{\sin x}\int \cos^3 x\mathrm{d}\cos x$.

2. 体会微分公式在换元法中的作用.

思考题解答

1. (1)若 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，则 $\int f[g(x)]\mathrm{d}g(x)=F[g(x)]+C$.

(2) $\int(1-\sin x^2)\mathrm{d}x^2=x^2+\cos x^2+C$.

(3) $\int \cos^3 x\mathrm{d}x=\int \cos^2 x\mathrm{d}\sin x=\int(1-\sin^2 x)\mathrm{d}\sin x=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$.

2. 在换元法中，熟悉微分公式是解题的前提，特别是第一换元法，要凑出微元 $\mathrm{d}u$，需将微分公式倒过来使用，因此对公式的熟练程度要求更高，解题时要特别注意是否正确地应用微分公式，检查系数和正、负号.

4.3　分部积分法

分部积分法(integration by parts)是对被积函数具有乘积形式的积分所采用的方法.

由乘积求导公式$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$移项得

$$u(x)v'(x)=[u(x)v(x)]'-u'(x)v(x),$$

两边积分得

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int u(x)\mathrm{d}v=u(x)v(x)-\int v(x)\mathrm{d}u(x)$$

或

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u.$$

请看以下例题

例 17　$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C.$

与公式比较可知,解题时设$x=u$,$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}v$,得到了满意的结果;若设$\mathrm{e}^x=u$,$x\mathrm{d}x=\mathrm{d}v$,则无法得到结果.可见,使用分部积分法时,恰当选取u和$\mathrm{d}v$是解题的关键.其中的技巧可通过例题和习题自行归纳.

例 18　$\int x\cos x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\sin x=x\sin x-\int \sin x\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C.$

例 19　求$\int x\ln x\mathrm{d}x$.

解　设$u=\ln x$,$\mathrm{d}v=x\mathrm{d}x$,则$\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$,$v=\frac{1}{2}x^2$.

$$\int x\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C.$$

例 20　求$\int \arctan x\mathrm{d}x$

解　设$u=\arctan x$,$\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$,则$\mathrm{d}u=\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$,$v=x$.

$$\begin{aligned}\int \arctan x\mathrm{d}x&=x\arctan x-\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=x\arctan x-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2}\\&=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.\end{aligned}$$

例 21　求$\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$

解　设$u=\mathrm{e}^x$,$\mathrm{d}v=\sin x\mathrm{d}x$,则$\mathrm{d}u=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$,$v=-\cos x$.

$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$

对 $\int e^x \cos x dx$ 再用一次分部积分法，设 $u=e^x, dv=\cos x dx$，则 $du=e^x dx, v=\sin x$.

$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$. 移项得

$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + C.$

上题中使用了两次分部积分法，因为第一次设 u 为指数函数，故第二次仍设 u 为指数函数，否则又会回到原来的积分；如果第一次设 $u=\sin x, dv=e^x dx$ 也可解此题，那么，第二次也设 u 为三角函数.

思考题

1. 归纳分部积分法中选择 u 和 dv 的一些技巧(答案略).

4.4 几种特殊类型函数的积分

4.4.1 有理函数的积分

有理函数是指由两个多项式的商所表示的函数，当分母次数大于分子次数时称为真分式，当分母次数小于或等于分子次数时称为假分式，假分式可以利用多项式的除法化成一个多项式和一个真分式之和的形式. 例如

$$\frac{x^3+2x+2}{x^2+1} = x + \frac{x+2}{x^2+1}.$$

左边为一个假分式，右边为一个多项式和一个真分式之和. 因此，有理函数的积分问题实际上就是求真分式的积分问题. 请看例题：

例 22 求 $\int \frac{x+1}{x(x-1)^3} dx$.

解 设 $\frac{x+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$.

则 $x+1 = A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx$.

令 $x=0$，求得 $A=-1$.

令 $x=1$，求得 $D=2$.

再令 $x=2$，得 $A+2B+2C+2D=3$.

令 $x=-1$，得 $8A+4B-2C+D=0$.

解得 $B=1, C=-1$.

所以 $\int \frac{x+1}{x(x-1)^3} dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}\right) dx$

$$= -\ln|x| + \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C.$$

以上方法称为部分分式积分法，如果将上题改为 $\int \frac{x+1}{x(x^2+1)^2} dx$ 则要设

$\frac{x+1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$，这是因为分母括号内是二次多项式，分子需设为一次多项式. 当然，有时候可利用一些技巧来分解成部分分式.

一般的规则可参考文献[1].

4.4.2　三角函数有理式的积分

三角函数有理式是指由三角函数和常数经过有限次四则运算所构成的表达式，其不定积分可以用三角函数的公式变换后计算，也可令 $\tan\frac{x}{2}=u$，将被积函数化为 u 的有理函数进行积分. 此时

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u.$$

解题时可以根据被积函数的特点灵活选择.

例 23　求 $\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$.

解 1　$\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x-\int\tan^2 x\mathrm{d}x$

$$=-\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos^2 x}-\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{\cos x}-\tan x+x+C.$$

解 2　$\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x+1-1}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x-\int\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x.$

令 $\tan\frac{x}{2}=u$，则 $\int\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int\frac{2}{(1+u)^2}\mathrm{d}u=-\frac{2}{1+u}+C$

$$=-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C.$$

所以 $\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=x+\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C.$

以上两种解法的结果形式不同，但求导后可验证其正确性. 由此也可知道，不定积分的结果有时候可以由不同的形式表示.

4.4.3　简单无理函数的积分

根式内含有变量的函数称为无理函数，对于含有$\sqrt[n]{ax+b}$的函数，为了去掉根号，可设$\sqrt[n]{ax+b}=u$，将被积函数化为有理函数.

例 24　求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+2x}+1}$.

解　设$\sqrt[3]{1+2x}=u$，则 $x=\frac{1}{2}(u^3-1)$.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+2x}+1}=\int\frac{1}{u+1}\cdot\frac{3}{2}u^2\mathrm{d}u=\frac{3}{2}\int\frac{u^2-1+1}{u+1}\mathrm{d}u=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}u^2-u+\ln|u+1|\right)$$

$$+C.=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{1+2x}+\frac{3}{2}\ln|\sqrt[3]{1+2x}+1|+C.$$

4.5 积分表的使用

前面介绍了不定积分的计算方法，由于有些积分并不是很容易求出的，为使用方便，将常用的不定积分列成表格，称为积分表(见附录 1). 使用时根据被积函数的类型或经过简单的变形，查表即可得到所需结果.

例 25 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}$可查积分表第(24)条.

例 26 $\int \frac{\mathrm{d}x}{6-5\cos x}$可查积分表第(80)条，其中 $a=6,b=-5$.

有些被积函数不能直接从表中查到，则可以经变量代换，将被积函数变成与公式相同的形式或用递推公式逐次进行计算.

例 27 $\int \sin^5 x\mathrm{d}x$.

解 利用积分表中公式(66)，

$$\int \sin^5 x\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\sin^4 x\cos x+\frac{4}{5}\int \sin^3 x\mathrm{d}x \text{(继续使用此公式)}$$

$$= -\frac{1}{5}\sin^4 x\cos x+\frac{4}{5}\left[-\frac{1}{3}\sin^2 x\cos x+\frac{2}{3}\int \sin x\mathrm{d}x\right]$$

$$= -\frac{1}{5}\sin^4 x\cos x-\frac{4}{15}\sin^2 x\cos x-\frac{8}{15}\cos x+C.$$

当今电脑已广泛地使用，应用 Matlab 或 Mathematica 软件，只需输入被积函数即可得到结果. 这么说，前面学的积分法白学了？完全不是. 正如一般的代数计算那样，虽然有计数器可以使用，但基本的运算方法和运算法则是必须掌握的. 不定积分的计算在很多情况下，不必查表或使用电脑便可得到结果.

需要说明的是：对于初等函数，在其定义区间上，原函数一定存在，但原函数不一定都是初等函数. 因此，有些初等函数的不定积分虽然存在，但无法用初等函数表达出来. 如$\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，$\int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$，$\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$，$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}$等，当然，查积分表或用电脑软件也同样无能为力.

习　题　4

1. 求下列函数的导数，并写出相应的不定积分表达式：

e^{3x}；$\arctan x$；$\dfrac{3}{8x+1}$；$\cos^2 x$；$\ln\sin x$；$\dfrac{2}{\sqrt{x}-5}$.

2. 求下列不定积分：

(1) $\int\left(9x+3x^2+\dfrac{1}{5x}\right)dx$；　　(2) $\int\left(x^{\frac{1}{3}}-6x^{\frac{3}{8}}+\dfrac{4}{\sqrt{3x}}\right)dx$；

(3) $\int(e^x-2^x+7^x-5^x)dx$；

(4) $\int(4\sin x+3\cos x-9\tan x\sec x+19\sec x\cot x+\sec^2 x)dx$；

(5) $\int(\tan^2 x-\cot^2 x)dx$；　　(6) $\int\dfrac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}dx$.

3. 将下列表达式凑成微元形式：

$3xdx$；　x^2dx；　$\sin xdx$；　$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$；　$\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$；　$\dfrac{1}{x}dx$；

$\sec^2 xdx$；$\tan x\sec xdx$；　e^xdx；　$e^{-2x}dx$；

4. 在括号内填上适当的微元，直接利用公式求积分：

(1) $\int\cos^5 x\,d(\quad)$；　　(2) $\int\dfrac{1}{\ln x}d(\quad)$；

(3) $\int\dfrac{1}{1+3^x}d(\quad)$；　　(4) $\int\dfrac{1}{1+e^{2x}}d(\quad)$.

5. 利用换元法求下列不定积分：

(1) $\int\dfrac{1-2x}{1+x^2}dx$；　　(2) $\int\dfrac{1}{t^2}\sin\dfrac{1}{t}dt$；

(3) $\int\sqrt{\sin x}\cos xdx$；　　(4) $\int\sin^3 udu$；

(5) $\int x\tan^2 x^2dx$；　　(6) $\int\sec^2 x\tan^2 xdx$；

(7) $\int\dfrac{1}{9+e^x}dx$；　　(8) $\int\dfrac{1}{x\ln^2 x}dx$；

(9) $\int\dfrac{1}{\sin^2 3t}dt$；　　(10) $\int\dfrac{1}{1+x^2}\arctan xdx$；

(11) $\int\dfrac{1}{\sqrt{3-7u}}du$；　　(12) $\int\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arccos xdx$；

(13) $\int\dfrac{1}{2x^2-9}dx$；　　(14) $\int\dfrac{\sqrt{1+x}}{x}dx$；

(15) $\int\dfrac{x}{3+x^4}dx$；　　(16) $\int\dfrac{1}{1+\sqrt{t}}dt$；

(17) $\int \frac{x}{\sqrt{3-x}}dx$；　　(18) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.

6. 用分部积分法求下列积分：

(1) $\int e^{\sqrt{x}}dx$；　　(2) $\int x\sin x dx$；

(3) $\int \arccos x dx$；　　(4) $\int e^x\cos 2x dx$；

(5) $\int \sec^3 x dx$；　　(6) $\int \ln(x^2+1)dx$.

7. 用适当的方法求下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$；　　(2) $\int x\tan^2 x dx$；

(3) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}dx$；　　(4) $\int \frac{\sin x}{e^x}dx$；

(5) $\int \frac{x}{(1+x)^2}dx$；　　(6) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$；

(7) $\int \sin 3x\cos 2x dx$；　　(8) $\int \frac{6}{x^2+2x+5}dx$.

习题 4 答案

1. 略.

2. (1) $\frac{9}{2}x^2+x^3+\frac{1}{5}\ln|x|+C$；

(2) $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{48}{11}x^{\frac{11}{48}}+\frac{8}{\sqrt{3}}\sqrt{x}+C$；

(3) $e^x-\frac{1}{\ln 2}2^x+\frac{1}{\ln 7}7^x-\frac{1}{\ln 5}5^x+C$；

(4) $-4\cos x+3\sin x-9\sec x-19\sec x-\cot x+C$；

(5) $\tan x+\cot x+C$；

(6) $\arcsin x+C$.

3. 略.

4. (1) $\arctan x-\ln(1+x^2)+C$；

(2) $\cos\frac{1}{t}+C$；

(3) $\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x+C$；

(4) $-\cos u+\frac{1}{3}\cos^3 u+C$；

(5) $\frac{1}{2}(\tan x^2-x^2)+C$；

(6) $\frac{1}{3}\tan^3 x+C$；

(7) $-\frac{1}{9}\ln(9e^{-x}+1)+C$；

(8) $-\frac{1}{\ln x}+C$；

(9) $-\frac{1}{3}\cot 3t+C$；

(10) $\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$；

(11) $-\frac{2}{7}\sqrt{3-7u}+C$；

(12) $-\frac{1}{2}(\arccos x)^2+C$；

(13) $\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-3}{\sqrt{2}x+3}\right|+C$；

(14) $2\sqrt{x+1}+\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$；

(15) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2}{\sqrt{3}}+C$;

(16) $2\sqrt{t}-2\ln|1+\sqrt{t}|+C$;

(17) $-6\sqrt{3-x}+\frac{2}{3}(3-x)^{\frac{3}{2}}+C$;

(18) $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$.

5. (1) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$;

(2) $\sin x-x\cos x+C$;

(3) $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$;

(4) $\frac{1}{5}e^x(2\sin 2x+\cos 2x)+C$;

(5) $\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\ln|\tan x+\sec x|+C$;

(6) $x\ln(x^2+1)-2x+2\arctan x+C$.

6. (1) $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$;

(2) $x\tan x+\ln|\cos x|-\frac{1}{2}x^2+C$;

(3) $\ln|1+\sin x|+C$;

(4) $-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C$;

(5) $\ln|1+x|+\frac{1}{1+x}+C$;

(6) $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$;

(7) $-\frac{1}{10}\cos 5x-\frac{1}{2}\cos x+C$;

(8) $\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C$.

第 5 章

定积分

定积分是一元函数积分学中的另一个基本内容，它在实际问题中有着广泛的应用. 定积分和不定积分有着密切的内在联系，这种联系的基础是牛顿-莱布尼兹公式. 在这一章里，我们将从实际问题出发引出定积分的概念，然后讨论它的性质及计算方法. 作为定积分的推广，还将介绍广义积分的概念. 本章最后安排了一些应用方面的例子.

5.1 定积分的概念

5.1.1 两个实例

例 1 曲边梯形的面积

所谓曲边梯形(Curvilinear Trapezoid)，就是有三条边是直线，其中两条互相平行且与第三条垂直，第四边是一条曲线所围成的图形. 为确定起见，取底为 x 轴，另两条边为 $x=a$ 和 $x=b$，顶部曲线的方程为 $y=f(x)$，见图 5.1.

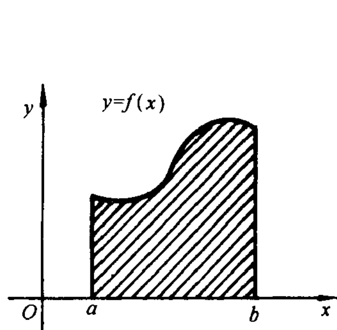


图 5.1

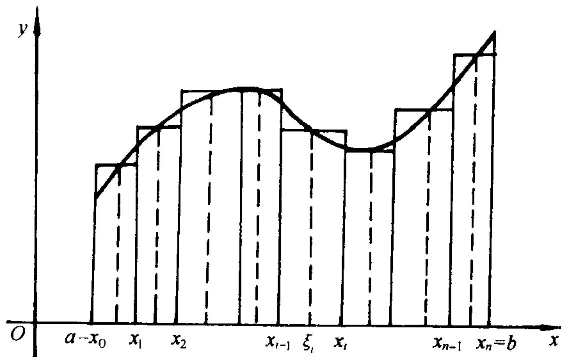


图 5.2

我们知道，矩形的面积 = 底 × 高. 因此，为了计算曲边梯形的面积 A，可以先

将它分割成若干个小曲边梯形，每个小曲边梯形用相应的小矩形近似代替，把这些小矩形的面积累加起来，就得到曲边梯形面积 A 的近似值，当分割无限变细时，这个近似值就无限接近于所求的曲边梯形面积.

具体可按下述步骤求 A 的值(设 $f(x)\geqslant 0, a<b$，见图 5.2)

(a) 分割　将曲边梯形分割为 n 个小曲边梯形.

用分点

$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 把区间 $[a,b]$ 任意划分成 n 个小区间

$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{i-1},x_i],\cdots,[x_{n-1},x_n]$，每个小区间的长度为

$\Delta x_1=x_1-x_0, \Delta x_2=x_2-x_1,\cdots,\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$，记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$.

过每一个分点作平行于 y 轴的直线，把曲边梯形分成 n 个小曲边梯形，它们的面积分别记为 $\Delta A_1,\Delta A_2,\cdots,\Delta A_n$.

(b) 近似代替　用小矩形面积近似代替小曲边梯形面积.

在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$，用 $f(\xi_i)$ 为高，Δx_i 为底的小矩形面积近似代替相应的小曲边梯形面积 ΔA_i，即

$$\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i.$$

(c) 求和　把各个小矩形的面积相加即可求得整个曲边梯形面积 A 的近似值

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

即

$$A\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

(d) 取极限　使曲边梯形面积的近似值转化为精确值.

当 n 无限增大(即分点无限增多)，每个小区间的长度无限缩小时，即令 $\lambda\to 0$，表示所有小区间长度 Δx_i 中之最大值趋于零，则得到 A 的精确值，即

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

例 2　变速直线运动的路程

设物体沿直线运动，它的速度 v 是时间 t 的函数 $v(t)$，求物体在 $t=T_1$ 到 $t=T_2$ 这段时间所经过的路程 S.

我们知道，匀速直线运动的路程公式是　路程 = 速度 × 时间. 现在我们研究的是非匀速直线运动，不能直接运用上面的公式来求路程. 但是，当时间间隔很短时，速度变化很小，可以近似地认为速度是不变的，从而在这段很短的时间间隔内可以运用上面的公式. 为此，我们采用与求曲边梯形面积相同的思路来解决这个问题.

(a) 用分点

$$T_1=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_i<\cdots<t_{n-1}<t_n=T_2$$

将时间间隔$[T_1,T_2]$任意分成 n 个小段时间

$$[t_0,t_1],[t_1,t_2],\cdots,[t_{n-1},t_n],$$

各段时间长为$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$，记 $\lambda=\max\{\Delta t_1,\Delta t_2,\cdots,\Delta t_n\}$. 相应地，在各段时间内物体走过的路程为 $\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_n$.

(b) 在时间间隔$[t_{i-1},t_i]$上任取一个时刻 $\alpha_i(t_{i-1}\leqslant \alpha_i\leqslant t_i)$，以 α_i 时刻的速度 $v(\alpha_i)$ 近似代替$[t_{i-1},t_i]$上各个时刻的速度，得到部分路程 ΔS_i 的近似值，即

$$\Delta S_i \approx v(\alpha_i)\Delta t_i,i=1,2,\cdots,n.$$

(c) 所求变速直线运动路程 S 的近似值等于 n 段分路程的近似值之和，即

$$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i\approx\sum_{i=1}^{n}v(\alpha_i)\Delta t_i.$$

(d) 让 $\lambda\to 0$，求上式右端的极限，便得到变速直线运动的路程，即

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}v(\alpha_i)\Delta t_i.$$

5.1.2　定积分的定义

前面所讲的两个具体问题，最后都归结为求具有相同结构的一种“和式的极限”. 不仅如此，其他许多实际问题也可归结为求这种“和式的极限”. 为此，我们撇开这些问题各自的具体内容，从而抽象出定积分的概念.

定义 1　设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上有定义，用分点

$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$ 把区间$[a,b]$任意划分成 n 个小区间

$$[x_0,x_1],\cdots,[x_{i-1},x_i],\cdots,[x_{n-1},x_n],$$

各个小区间的长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$，记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$. 在每个小区间$[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$上任取一点$\xi_i(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)$，取函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i(i=1,2,\cdots,n)$，并作和式

$$S=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

如果不论对$[a,b]$怎样划分，ξ_i 在$[x_{i-1},x_i]$上怎样取，只要当 $\lambda\to 0$(即每一个小区间都无限缩小)时，和 S 总有确定的极限值 L，则称 L 为 $f(x)$ 在$[a,b]$上(或从 a 到 b)的**定积分**(definite integral)，记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=L,$$

其中，x 称为**积分变量**(variable of integration)，$f(x)$ 称为**被积函数**(integrand)，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**(integrated expression)，a 称为**积分下限**(lower limit)，b 称为**积分上限**(upper limit)，区间$[a,b]$称为**积分区间**(interval of integration). 函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的定积分存在，也称 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上**可积**(Integrable).

可以证明：若函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上一定可积；若

$f(x)$ 在$[a,b]$上只有有限个第一类间断点，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上也一定可积.

如果 $a=b$，积分区间$[a,b]$变成了一个点，$\Delta x_i=0$，因此，$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$.

若在区间$[a,b]$上由 a 到 b 求定积分时，就由 a 到 b 顺次取分点. 反过来，如果要从 b 到 a 求定积分，自然应当从 b 到 a 顺次取分点，然后再作乘积，求和，取极限：

$$b=x_n>x_{n-1}>\cdots>x_{i+1}>x_i>x_{i-1}>\cdots>x_1>x_0=a,$$

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\Delta x_i{}^*\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i{}^*,$$

其中

$$\Delta x_i{}^*=x_i-x_{i+1}=-\Delta x_i.$$

于是

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=-\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

由定积分的定义可知，定积分本质上是一个求和(sum)的过程，积分记号$\int$就是字母 S 的变形，求和的结果是一个数值，这个值取决于被积函数 $f(x)$ 和积分区间$[a,b]$，而与积分变量用什么字母符号无关，即有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(z)\mathrm{d}z.$$

有了定积分的定义后，可知前面的例 1 中曲边梯形的面积 A 等于曲边函数 $y=f(x)$ 在区间$[a,b]$上的定积分，即

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

在例 2 中，非匀速直线运动的路程 S 等于速度函数 $v(t)$ 在时间区间$[T_1,T_2]$上的定积分，即

$$S=\int_{T_1}^{T_2}v(t)\mathrm{d}t.$$

5.1.3 定积分的几何意义

定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义可用曲边梯形的面积来说明.

当 $f(x)\geqslant 0, a<b$ 时，定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 可看作是由曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a$、$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积(见图 5.3).

当 $f(x)\leqslant 0, a<b$ 时，由于积分和式 $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 中所有的 $f(\xi_i)\leqslant 0$，而 $\Delta x_i>0$，所以 $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i<0$，从而$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant 0$，这时$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=$

$f(x)$、直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的位于 x 轴下方的曲边梯形面积的负值(见图 5.4).

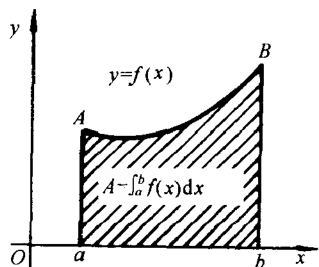


图 5.3

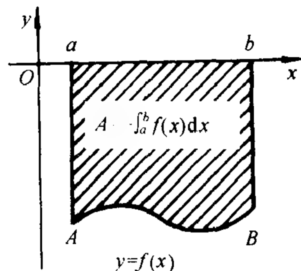


图 5.4

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形的某些部分在 x 轴上方，另外某些部分在 x 轴下方，那么这时定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示 $f(x)$ 与 x 轴所围成的介于 a，b 之间的各曲边梯形面积的代数和(见图 5.5).

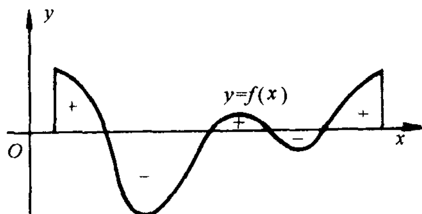


图 5.5

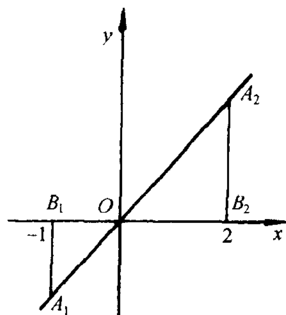


图 5.6

例 3　利用定积分的几何意义求 $\int_{1}^{2} 2x\mathrm{d}x$.

解　如图 5.6，记 $y=f(x)=2x$，则被积函数 $f(x)$ 与 x 轴、$x=-1$、$x=2$ 围成的图形由两部分组成：$\triangle A_1B_1O$ 和 $\triangle A_2B_2O$，

$$S_{\triangle A_1B_1O}=\frac{1}{2}\times 1\times 2=1,$$

$$S_{\triangle A_2B_2O}=\frac{1}{2}\times 2\times 4=4.$$

所以

$$\int_{-1}^{2} 2x\mathrm{d}x=-S_{\triangle A_1B_1O}+S_{\triangle A_2B_2O}=-1+4=3.$$

思考题

1. 定积分的定义是什么？它的几何意义是什么？

2. 若将区间$[a,b]$等分，分点为$x_i,i=1,2,\cdots,n$，取$\xi_i=x_i$，如果$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$存在，能否说$f(x)$在$[a,b]$上可积.

3. 曲线$y=\cos x$与直线$y=0,x=0,x=\pi$所围成的面积为$\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}x$，对吗？

4. 利用定积分的几何意义计算下列积分：

(1) $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^1(-x+1)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_{-1}^0 3x\mathrm{d}x$.

思考题解答

1. 略.
2. 不一定.
3. 错.

$$\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x+\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\mathrm{d}x\right|.$$

4. (1) $\frac{\pi}{4}$，　(2) $\frac{1}{2}$，　(3) 0，　(4) $-\frac{3}{2}$.

5.2 定积分的性质

在下面讨论的各个性质中，如无特别说明，均假定所涉及的积分存在.

性质 1 函数代数和的定积分等于各个函数定积分的代数和，即

$$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证
$$\begin{aligned}\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)\pm g(\xi_i)]\Delta x_i\\&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\pm\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i\\&=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

性质 1 可以推广到两个以上的有限个函数代数和的情况，即

$$\int_a^b\left(\sum_{i=1}^{n}f_i(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\int_a^b f_i(x)\mathrm{d}x.$$

性质 2 常数因子可以提到积分符号外，即

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

性质 3　若 $a < c < b$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

其实此性质的成立与 a、b、c 的大小顺序无关. 比如，若 $c < b < a$，则有

$$\int_c^a f(x)\mathrm{d}x = \int_c^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

由于 $\int_c^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$，$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，代入上式移项后亦得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

性质 4　如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \equiv 1$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - b - a.$$

此性质可由定积分的几何意义说明.

性质 5　如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

性质 6（定积分中值定理）　如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在区间 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a),$$

或者写成

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi).$$

中值定理的严格证明从略，只作几何解释，见图 5.7. 从图中可以看出：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 内至少可以找到一点 ξ，使得用它所对应的函数值 $f(\xi)$ 作高，以区间 $[a,b]$ 的长度 $b-a$ 作为底的矩形面积 $f(\xi)(b-a)$，恰好等于同一底上以曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积.

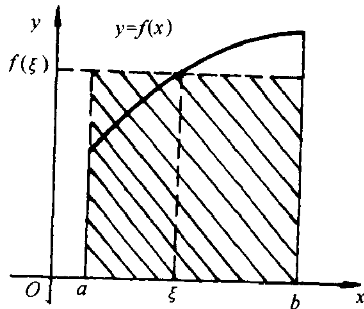


图 5.7

通常称 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为**函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值**. 它是有限个数平均值概念的一种推广. 在实际问题中通常利用此式来计算连续函数在某一闭区间上的平均值. 例如,在药物动力学中计算平均血药浓度,在物理学中计算平均速度、平均功率等.

例 1 求函数 $y=f(x)=2x$ 在区间 $[0,1]$ 上的平均值 $\overline{y}$.

解 可利用定积分的几何意义求得

$$\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

所以,函数 $y=2x$ 在区间 $[0,1]$ 上的平均值为

$$\overline{y}=\frac{1}{1-0}\int_0^1 2x\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\mathrm{d}x=2\times\frac{1}{2}=1.$$

思 考 题

1. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,且 $g(x)\neq 0$, $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\neq 0$, 则 $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}\mathrm{d}x=\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$ 是否成立?为什么?

2. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,证明

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

3. 从定积分定义出发,推导计算连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值公式 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

思考题解答

1. 不成立. 例如设 $f(x)=x, g(x)=x$, 区间为 $[1,4]$, 则有 $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^4 x\mathrm{d}x=\frac{15}{2}=\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x$, 而 $\int_1^4 \frac{f(x)}{g(x)}\mathrm{d}x=\int_1^4 \frac{x}{x}\mathrm{d}x=\int_1^4 1\mathrm{d}x=3$,

显然

$$\int_1^4 \frac{f(x)}{g(x)}\mathrm{d}x\neq\frac{\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x}{\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x}=1.$$

2. 提示:

$$-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant |f(x)|,$$

从而根据性质 5 得出结论.

3. 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在. 将 $[a,b]$ n 等分，每个分点 x_i 上的函数值为 $y_i = f(x_i), i = 1,2\cdots,n$. 分点间的距离为 $\Delta x = \frac{b-a}{n}$，$y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的算术平均值为

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = \frac{1}{b-a}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)\Delta x.$$

随着分点的增多，近似的程度越高，当 $\Delta x \to 0$ 时，$\bar{y}$ 不断逼近 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值，即

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} y_i\Delta x \\ &= \frac{1}{b-a}\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

5.3 牛顿-莱布尼兹公式

一般来讲，直接用定积分的定义或定积分的几何意义计算定积分是非常困难的，有时是根本不可能的. 这一节将给出计算定积分的一般方法.

下面的定理，给出了定积分与不定积分之间的关系，使我们可以借助不定积分来计算定积分.

定理1（牛顿-莱布尼兹公式） 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的任意一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{5.1}$$

证明 用分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

将区间 $[a,b]$ 任意划分为 n 个小区间

$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$ $(x_0 = a, x_n = b)$，各区间的长度分别是 Δx_1，$\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n$，记 $\lambda = \max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$.

由于 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，即 $F'(x) = f(x)$.

在各个小区间上对 $F(x)$ 分别应用微分中值定理，可得

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(a) &= (x_1 - x_0)F'(\xi_1) = f(\xi_1)\Delta x_1, \\ F(x_2) - F(x_1) &= (x_2 - x_1)F'(\xi_2) = f(\xi_2)\Delta x_2, \\ &\cdots\cdots \\ F(b) - F(x_{n-1}) &= (x_n - x_{n-1})F'(\xi_n) = f(\xi_n)\Delta x_n, \end{aligned}$$

其中 $\xi_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 是区间 $[x_{i-1},x_i]$ 内适合微分中值定理的值.

将以上 n 个等式相加，得

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

由于定积分中 ξ_i 的选择与 $[a,b]$ 的分法可以是任意的，使选取的 ξ_i 符合微分中值定理的要求是可以的，

令 $\lambda\to 0$，等式两边取极限，得

$$\begin{aligned}F(b)-F(a)&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\\&=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

上式称为牛顿 - 莱布尼兹公式(Newton-Leibniz's Formula)，它是定积分的主要计算公式. 常记 $F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$.

下面举例说明牛顿 - 莱布尼兹公式的应用.

例 1　求

$$\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$$

解

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x&=-\cos x\Big|_0^{\pi}\\&=-\cos\pi+(\cos 0)=2.\end{aligned}$$

例 2　求

$$\int_1^2(2x+\frac{1}{x})\mathrm{d}x$$

解

$$\begin{aligned}\int_1^2(2x+\frac{1}{x})\mathrm{d}x&=(x^2+\ln|x|)\Big|_1^2\\&=4+\ln 2-(1+\ln 1)\\&=3+\ln 2.\end{aligned}$$

例 3　求

$$\int_0^a\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$$

解

$$\begin{aligned}\int_0^a\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x&=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\Big|_0^a\\&=\frac{1}{a}\arctan 1-\frac{1}{a}\arctan 0\\&=\frac{\pi}{4a}.\end{aligned}$$

例 4　求

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$$

解　因为

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1+x^2)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C\\&=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C,\end{aligned}$$

$$\text{故}\quad \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

例 5　设函数 $f(x)$ 为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ \mathrm{e}^x, & 0 \leqslant x < 1. \end{cases}$$

计算$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

解　由定积分的区间可加性有

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^x\Big|_0^1 + \ln|x|\Big|_1^2 \\ &= \mathrm{e} - 1 + \ln 2.\end{aligned}$$

例 6　设快速静脉注射某药后，血药浓度 C 与时间 t 的函数关系为 $C = C_0\mathrm{e}^{-kt}$，其中 C_0 为初始浓度，k 为速率常数，求从 $t=0$ 到 $t=T$ 这段时间内的平均血药浓度 $\bar{C}$.

解　在时间间隔 $t=0$ 到 $t=T$ 内，血药浓度 C 的平均值为

$$\begin{aligned}\bar{C} &= \frac{1}{T-0}\int_0^T C\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T C_0\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\int_0^T C_0\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t &= C_0\int_0^T \mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{C_0}{k}\mathrm{e}^{-kt}\Big|_0^T \\ &= \frac{C_0}{k}(1-\mathrm{e}^{-kT}),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\bar{C} &= \frac{1}{T}\cdot\frac{C_0}{k}(1-\mathrm{e}^{-kT}) \\ &= \frac{C_0}{Tk}(1-\mathrm{e}^{-kT}).\end{aligned}$$

思 考 题

1. 运用牛顿－莱布尼兹公式求定积分的关键是什么？
2. 求$\int_0^2 |1-x|\mathrm{d}x$.

思考题解答

1. 求出被积函数 $f(x)$ 的任意一个原函数.

2. 因为

$$|1-x|=\begin{cases}1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^2|1-x|\mathrm{d}x&=\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x+\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x\\&=\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1+\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\Big|_1^2\\&=1.\end{aligned}$$

读者不妨作出被积函数的图形,用面积来加以验证.

5.4 定积分的计算

牛顿-莱布尼兹公式给出了计算定积分的方法,只要能求出被积函数的任意一个原函数,然后分别代入上、下限,计算其差就可以了. 为了进一步简化运算,我们再介绍定积分的换元法和分部积分法.

5.4.1 定积分的换元法

定理 1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,计算定积分时作代换 $x=\varphi(t)$, $\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha、\beta]$ 上单值且有连续导数,当 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 时,$a\leqslant x\leqslant b$,且 $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

证明略.

此公式可灵活运用,如对 t 积分困难,可将变量 t 变换为 x(相当于用第一换元法),于是令 $\varphi(t)=x$,则 $\varphi'(t)\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$,等式右边积分变成 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$;如果对 x 积分困难,可将变量 x 变换为 t(相当于用第二换元法),于是令 $x=\varphi(t)$,等式左边积分变成 $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$. 不管怎样,总的原则是化繁为简,化难为易.

特别要注意的是积分变量改变后,必须随之改变积分限. 如果积分变量没有改变,即使积分元发生改变,也不改变积分上下限.

例 1 计算 $\int_{-1}^1\frac{x}{\sqrt{5-4x}}\mathrm{d}x$

解 令 $\sqrt{5-4x}=t$ 则

$$x=\frac{5-t^2}{4}\qquad\qquad \mathrm{d}x=\left(\frac{5-t^2}{4}\right)'\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}t\mathrm{d}t.$$

积分变量改变为 t，所以积分限必须作相应改变.

当 $x=-1$ 时，$t=3$；

当 $x=1$ 时，$t=1$.

所以

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{5-4x}}\mathrm{d}x&=\int_{3}^{1}\frac{1}{t}\left(\frac{5-t^2}{4}\right)\left(-\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{8}\int_{3}^{1}(5-t^2)\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{8}\left(5t-\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_{3}^{1}\\&=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

不定积分的换元法最后要代回原变量 x，而定积分的换元法由于改变了上下限，积分后就无需再代回了.

例 2　计算 $\int_{1}^{e^3}\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}\int_{1}^{e^3}\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x&=\int_{1}^{e^3}\frac{1}{\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}(1+\ln x)\\&=2\sqrt{1+\ln x}\Big|_{1}^{e^3}\\&=2(2-1)=2.\end{aligned}$$

由于没有引入新变量，所以不需改变积分上下限.

例 3　计算 $\int_{0}^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\mathrm{d}x$

解　令 $\sqrt{e^x-1}=t$，则

$$x=\ln(t^2+1),\mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

当 $x=0$ 时，$t=0$；

当 $x=\ln 2$ 时，$t=1$.

所以

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\mathrm{d}x&=\int_{0}^{1}t\cdot\frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t\\&=2\int_{0}^{1}\frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t\\&=2\int_{0}^{1}\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\mathrm{d}t\\&=2\int_{0}^{1}\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t\\&=2\left(\int_{0}^{1}\mathrm{d}t-\int_{0}^{1}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t\right)\\&=2\left(t\Big|_{0}^{1}-\arctan t\Big|_{0}^{1}\right)\end{aligned}$$

$$= 2 - \frac{\pi}{2}.$$

例 4 设函数 $f(x)$ 在区间$[-a,a]$上连续，
证明：(1) 若函数 $f(x)$ 为偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 若函数 $f(x)$ 为奇函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

证明 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$
对等式右边第一个积分作代换，令 $x = -t$，则

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(-t)(-\mathrm{d}t) = \int_{0}^{a} f(-t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x.$$

于是，

(1) 当 $f(x)$ 为偶函数时，则 $f(x) = f(-x)$，
从而 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$

(2) 当 $f(x)$ 为奇函数时，则 $f(x) = -f(-x)$，
于是 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0.$
故

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x, & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数;} \\ 0, & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数.} \end{cases}$$

5.4.2 定积分的分部积分法

定理 2 设 $u(x) = u, v(x) = v$ 在区间$[a,b]$上具有连续的导数 $u'(x)$ 和 $v'(x)$，由于

$$\mathrm{d}(uv) = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u,$$

则

$$\int_{a}^{b} \mathrm{d}(uv) = \int_{a}^{b} u\mathrm{d}v + \int_{a}^{b} v\mathrm{d}u,$$

即

$$\int_{a}^{b} u\mathrm{d}v = (uv)\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v\mathrm{d}u.$$

这个公式叫做定积分的**分部积分公式**.

这个公式和不定积分的分部积分公式完全类似，只是多了积分限. 因此，应用时一定别忘掉积分限.

例 5 计算$\int_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

解 设 $u=x,\mathrm{d}v=\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$,则

$$\mathrm{d}u=u'\mathrm{d}x=(x)'\mathrm{d}x=\mathrm{d}x,\ v=-\mathrm{e}^{-x}.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x&=(-x\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2}-\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\ln 2+\int_0^{\ln 2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\ln 2+(-\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^{\ln 2}\\&=\frac{1}{2}\ln\frac{\mathrm{e}}{2}.\end{aligned}$$

例 6 计算$\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\mathrm{d}x$.

解 设 $u=\arcsin x,\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$,则

$$\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x,\ v=x.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\mathrm{d}x&=(x\arcsin x)\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{12}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2)\\&=\frac{\pi}{12}+\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1.\end{aligned}$$

由于对计算已很熟练,因此可以不写出 u,v 而直接应用分部积分公式.

例 7 求$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\mathrm{d}x$

解

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\mathrm{d}(-\cos x)\qquad(u\mathrm{d}v)\\&=(-x^2\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\cos x\mathrm{d}(x^2)\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}(\sin x)\qquad(u\mathrm{d}v)\end{aligned}$$

$$= 2(x\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$$

$$= \pi - 2(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi - 2.$$

例 8　求$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{2x}\cos x\mathrm{d}x$

解　$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{2x}\cos x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}(\sin x) \qquad (u\mathrm{d}v)$$

$$= (\mathrm{e}^{2x}\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})$$

$$= \mathrm{e}^{\pi} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{2x}\sin x\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{e}^{\pi} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}(-\cos x) \qquad (u\mathrm{d}v)$$

$$= \mathrm{e}^{\pi} - 2\left[(-\mathrm{e}^{2x}\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x\cdot\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\right]$$

$$= \mathrm{e}^{\pi} - 2 - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{2x}\cdot\cos x\mathrm{d}x.$$

故

$$5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{2x}\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\pi} - 2,$$

即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{2x}\cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{5}(\mathrm{e}^{\pi} - 2).$$

5.4.3　定积分的近似计算

利用牛顿 - 莱布尼兹公式可以求部分函数的定积分，但实际应用中，经常遇到下列情况：

1）欲求$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的值，而$f(x)$的原函数根本不能用普通的初等函数表示出来．如$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，$\int_0^a\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

2）若被积函数$f(x)$是用表格方式表示的，则无法求出$f(x)$的原函数.

3）有时从理论上可以证明被积函数$f(x)$的原函数可以用初等函数表示出来，但计算过程相当复杂，即便能够求出来，得到的积分值也有可能是近似值.

所以定积分的近似计算已经成为应用定积分解决实际问题时不可缺少的方法.

定积分近似公式的基本思想是，从求面积的近似值着手，导出相应的求定积分的近似公式．这里只介绍几种简单而又比较有效的方法.

（1）矩形法(rectangular method)

矩形法的基本思想是将曲边梯形分成若干个小曲边梯形，再用小矩形近似地代替小曲边梯形，然后将各小矩形面积累加，得定积分的近似值.

计算$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，具体作法如下：

用分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 把区间$[a,b]$分成 n 等分，每个等分的长度为 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$，过各分点作平行于 y 轴的直线分别交曲线于 $y=f(x)$，并得到 $y_0,y_1,y_2,\cdots,y_n$，原来的图形被分成 n 个小曲边梯形，如图 5.8.

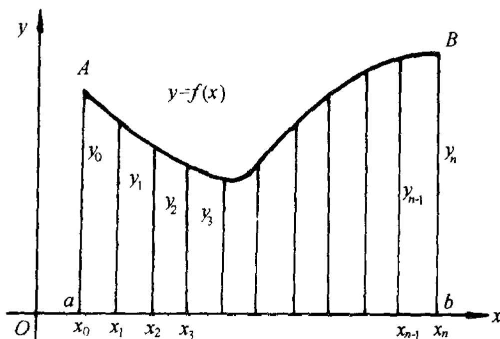


图 5.8

每个小曲边梯形的面积都用相应的小矩形面积 $y_0\Delta x,y_1\Delta x,\cdots,y_{n-1}\Delta x$ 或 $y_1\Delta x,y_2\Delta x,\cdots,y_n\Delta x$ 来近似代替，把它们加起来，就得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1})\Delta x$$

$$=\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1}),$$

或

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx(y_1+y_2+\cdots+y_n)\Delta x$$

$$=\frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n).$$

这就是用矩形法计算定积分近似值的公式.

(2) 梯形法(trapezoidal method)(图 5.9)

用小梯形代替小曲边梯形来近似计算定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的方法为梯形法.

把区间$[a,b]$用分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

分成 n 等分，每个等分的长度为 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$，分点对应的函数值为 $y_0,y_1,\cdots,y_n$，连接曲线 $y=f(x)$ 上相邻两点，得 n 个小直角梯形，它们的面积为

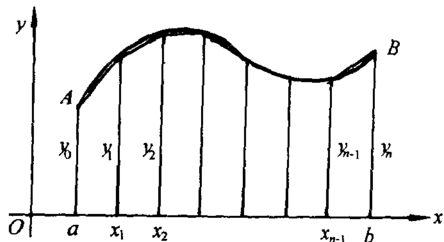


图 5.9

$$\frac{1}{2}(y_i+y_{i-1})\Delta x\qquad(i=1,2\cdots,n),$$

相加便得定积分近似值

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i+y_{i-1})\Delta x$$

$$=\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}y_i\right).$$

可以证明，若分点不均匀，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i + y_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

例 9 有 20 名受试者各口服磷霉素 2g，测得血药浓度 C 平均值如下：

t(h)	0.5	1	2	4	6	8	12
C(μg/ml)	1.00	4.54	8.89	6.44	3.69	2.87	2.23

计算$\int_0^{12} C(t)\mathrm{d}t$ 的近似值.

解 $$\begin{aligned}\int_0^{12} C(t)\,\mathrm{d}t &\approx \frac{1}{2}[(1.00 + 4.54) \times (1 - 0.5)\\ &+ (4.54 + 8.89) \times (2 - 1) + (8.89 + 6.44) \times (4 - 2)\\ &+ (6.44 + 3.69) \times (6 - 4) + (3.69 + 2.87)(8 - 6)\\ &+ (2.87 + 2.23) \times (12 - 8)]\\ &= 50.32.\end{aligned}$$

(3) 抛物线法(parabolic method)

抛物线法的基本思想是：用以抛物线为顶的小曲边梯形的面积来代替原来的小曲边梯形的面积.

用分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n} = b$$

把区间$[a,b]$分成 $2n$ 等分，分点的函数值为

$$y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{2n}.$$

过分点 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{2n}$ 作平行于 y 轴的直线与曲线 $y = f(x)$ 相交于 $2n$ 个点. 依次过相邻 3 个交点各作一条抛物线，见图 5.10.

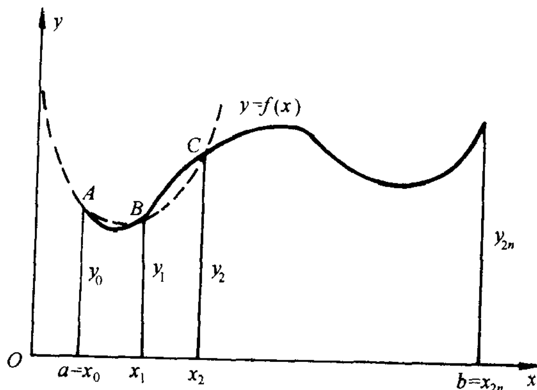


图 5.10

将 n 个以抛物线为顶的小曲边梯形的面积相加作为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值.

例如，过前 3 点 A,B,C 的抛物线下小曲边梯形的面积为 S_1，

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int_{x_0}^{x_2} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{\alpha}{3}x^3 + \frac{\beta}{2}x^2 + \gamma x\right)\Big|_{x_0}^{x_2} \\
&= \frac{\alpha}{3}(x_2^3 - x_0^3) + \frac{\beta}{2}(x_2^2 - x_0^2) + \gamma(x_2 - x_0) \\
&= \frac{x_2 - x_0}{6}[2\alpha(x_2^2 + x_2x_0 + x_0^2) + 3\beta(x_2 + x_0) + 6\gamma] \\
&= \frac{x_2 - x_0}{6}[(\alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma) + (\alpha x_0^2 + \beta x_0 + \gamma) \\
&\quad + \alpha(x_0 + x_2)^2 + 2\beta(x_0 + x_2) + 4\gamma].
\end{aligned}
$$

由于 x_1 是 x_0 和 x_2 的中点，所以 $x_0 + x_2 = 2x_1, x_2 - x_0 = 2 \cdot \frac{b-a}{2n}$.

从而

$$S_1 = \frac{b-a}{6n}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

类似地可计算其他以抛物线为顶的小曲边梯形的面积为

$$S_2 = \frac{b-a}{6n}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

$$S_3 = \frac{b-a}{6n}(y_4 + 4y_5 + y_6),$$

$$\cdots\cdots$$

$$S_n = \frac{b-a}{6n}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

将 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 加起来，就得到近似公式

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6n}[&(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) \\
&+ 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2})].
\end{aligned}
$$

这个公式称为**辛普生公式**(Simpson's formula).

例 10　分别用矩形法、梯形法和抛物线法计算定积分 $\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 的近似值，并比较它们的精确度.

解　$\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 \approx 0.693147.$

将积分区间[1,2]10 等分，即 $n = 10, \Delta x = \frac{2-1}{10} = 0.1$，令 $y = \frac{1}{x}$，算得各个分点的函数值分别为：1.0000，0.9091，0.8333，0.7692，0.7143，0.6667，0.625，0.5882，0.5556，0.5263，0.5000.

矩形法：

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x \approx \frac{2-1}{10}(1.00 + 0.9091 + \cdots + 0.5) = 0.76876.$$

梯形法：

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx \frac{2-1}{10}\left(\frac{1.000+0.5000}{2}+0.9091+\cdots+0.5263\right)$$
$$=0.69376.$$

抛物线法：

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx \frac{1}{30}[1+0.5000+2\times(0.8333+0.7143+0.625+0.5556)+$$
$$4\times(0.9091+0.7692+0.6667+0.5882+0.5263)]$$
$$\approx 0.693146.$$

三种求法的近似值与 0.693147 比较，可知矩形法的精度最低，其次是梯形法，抛物线法最好.

思考题

1. 对于积分$\int_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2}dx$ 作变换 $x=\sin t$ 是否可行，为什么？

2. 由牛顿 - 莱布尼兹公式，有

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_{-1}^1=\frac{\pi}{2}.$$

但若作 $x=\frac{1}{u}$ 的变换，则

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-1}^1 \frac{-1}{1+u^2}du=-\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}dx.$$

从而，有$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}dx=0$，两个结果哪一个是错误的？为什么？

思考题解答

1. 不行. 因为不管 t 如何取值，总有 $|x=\sin t|\leqslant 1$，而积分$\int_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2}dx$ 中 x 的取值范围是$[0,3]$.

2. 第二个. 因为 $x=\frac{1}{u}$ 在$[-1,1]$中有间断点 $x=0$，即在$[-1,1]$上不连续.

5.5 广义积分

定积分具有这样的特点：积分区间为有限区间；被积函数在积分区间上不存在无穷型间断点. 但在实际问题中，常会遇到积分的上、下限为无穷大或被积函数在积分区间上有无穷型间断点的情形. 因此，就需要把定积分的定义推广到这两种情况. 推广后的积分称为广义积分，以前讲过的定积分叫做常义积分.

5.5.1 无穷区间上的广义积分

定义 1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续，任取一有限数 $b(a < b < +\infty)$，积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，我们称极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上的广义积分(improper integral)，记作 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

如果极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 存在或收敛(convergent)；如果极限不存在，则称此广义积分不存在或发散(divergent).

例 1 计算广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 任取 $b\in(0, +\infty)$，则

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x\Big|_0^b = \arctan b,$$

从而

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\arctan b = \frac{\pi}{2}.$$

因为极限存在，所以广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

例 2 计算广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解 任取 $b\in(1, +\infty)$，则

$$\int_1^b\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|\Big|_1^b = \ln b,$$

从而

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\ln b = +\infty.$$

因为极限不存在，所以广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散.

类似地，可以定义区间 $(-\infty, b]$ 上的广义积分

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

此外,还可以定义区间$(-\infty,+\infty)$上的广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x,$$

其中c为$(-\infty,+\infty)$中任一常数,当右端两个广义积分都存在时,我们才说广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$存在,否则认为它发散.

例 3 计算广义积分$\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 任取$a\in(-\infty,0)$,则

$$\int_{a}^{0}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{a}^{0}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1+a^2),$$

从而

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{2}\ln(1+a^2)$$

$$= -\infty.$$

因为极限不存在,所以广义积分$\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$发散.

例 4 计算广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 取$c=0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x + \lim_{b\to-\infty}\int_{0}^{b}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\arctan x\Big|_{a}^{0} + \lim_{a\to-\infty}\arctan x\Big|_{0}^{b}$$

$$= -\lim_{a\to-\infty}\arctan a + \lim_{b\to-\infty}\arctan b$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$= \pi.$$

所以广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$收敛.

5.5.2 被积函数有无穷型间断点的广义积分

定义 2 设$f(x)$在$(a,b]$上连续,a为$f(x)$的无穷型间断点,即

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty.$$

任取 $\varepsilon>0$,积分$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 存在,我们则称极限$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 为函数$f(x)$在$(a,b]$上的广义积分,记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

若极限$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 存在,则称广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在或收敛,否则认为它不存在或发散.

例 5　计算广义积分$\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解　函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$在$(-1,0]$上连续,且 $x=-1$ 为 $f(x)$的无型间断点,即

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\infty.$$

任取 $\varepsilon>0$,则

$$\begin{aligned}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x &= \arcsin x\Big|_{-1+\varepsilon}^{0}\\ &= \arcsin(1-\varepsilon).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\arcsin(1-\varepsilon)\\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

类似地,若 $f(x)$在$[a,b)$上连续,且 b 为 $f(x)$的无穷型间断点,即$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$,则定义广义积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x.$$

若 $f(x)$在$[a,b]$上除 c 点外均连续,其中 $x=c$ 是 $f(x)$的无穷型间断点,即$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$,则定义广义积分

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x\\ &= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

同样地,当右端二个广义积分都存在时,我们才说广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,否则认

为它发散.

例 6 计算$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.

解 函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$在$[-1,1]$上除 $x=0$ 点外都连续，且 $x=0$ 为 $f(x)$的无穷型间断点，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty.$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x&=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\\&=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_{1}^{0-\varepsilon_1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{0+\varepsilon_2}^{1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\\&=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{-\varepsilon_1}\right)+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{\varepsilon_2}^{1}\right)\\&=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-1\right)+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}-1\right)\\&=+\infty.\end{aligned}$$

所以，广义积分$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 发散.

注意，如果疏忽了 $x=0$ 是被积函数的间断点，就会得到下面的错误结果：

$$\int_{1}^{1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{1}=-1-1=-2.$$

可见，对于形如$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的积分是普通积分，还是广义积分，要特别慎重，关键取决于 $f(x)$在$[a,b]$上是否有无穷型间断点，这也是能否得出正确结论的决定因素.

5.5.3 *Γ*函数

在许多自然科学理论和实际应用中，经常用到一个很重要的函数——Γ 函数(gamma function).

定义 3 当 $x>0$ 时，称函数

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

为 Γ 函数.

可以证明 $x>0$ 时，此广义积分收敛，$x\leqslant 0$ 时发散. 因此，Γ 函数在 $x>0$ 时才有定义.

当 $x\geqslant 1$ 时，积分$\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 为无穷区间上的广义积分.

当 $0<x<1$ 时，点 $x=0$ 为被积函数的无穷型间断点，这时积分可分成

$$\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\int_0^{1}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

Γ 函数有许多良好的性质. 这里只介绍几条简单常用的性质.

(1) $\Gamma(1)=1$.

证明 $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$

$$=\lim_{b\to+\infty}(-\mathrm{e}^{-t})\Big|_0^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}(1-\mathrm{e}^{-b})$$

$$=1.$$

(2) $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)\qquad(x>0)$.

证明 $\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty}t^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}x$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b t^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[(-t^x\mathrm{e}^{-t})\Big|_0^b+x\int_0^b t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\lim_{b\to+\infty}x\int_0^b t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

$$=x\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

$$=x\Gamma(x).$$

特别地，当 x 取为正整数 $n+1$ 时，有

$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-2)=\cdots=n!\ \Gamma(1)=n!$.

例 7　计算广义积分

$$\int_0^{+\infty}x^8\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

解 $\int_0^{+\infty}x^8\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^{9-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$$=\Gamma(9)=8!$$

$$=40320.$$

(3) $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin\pi x},\quad 0<x<1$.

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$\Gamma(\dfrac{1}{2})\cdot\Gamma(1-\dfrac{1}{2})=\dfrac{\pi}{\sin\dfrac{\pi}{2}}=\pi$，所以

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}.$$

例 8　求下列广义积分的值

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x,\ n>0.$$

解　令 $x^n=t$，则 $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}t$，所以

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} e^{-t} dt$$

$$= \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{n}-1} e^{-t} dt$$

$$= \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

例 9　计算 $\Gamma(4.5)$

解　$\Gamma(4.5) = \Gamma(3.5+1) = 3.5\Gamma(3.5)$

$= 3.5 \times 2.5 \times 1.5 \times 0.5 \times \Gamma(0.5)$

$= 6.5625\sqrt{\pi}$

$\approx 11.6317.$

思考题

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$，对吗？为什么？

2. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^e \frac{1}{x\ln^2 x} dx + \lim_{b \to +\infty} \int_e^b \frac{1}{x\ln^2 x} dx$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(-\frac{1}{\ln x}\Big|_\varepsilon^e\right) + \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{\ln x}\Big|_e^b\right)$$

$$= -1 + 1 = 0$$

对吗？为什么？

3. 计算广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

思考题解答

1. 错. 因为函数 $f(x) = \frac{1}{x^3}$ 在 $x=0$ 点间断，且为无穷型间断点，所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^3} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx.$$

右端两个广义积分均发散，故原积分发散.

2. 错. 因为 $x=0$、$x=1$ 为函数 $f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}$ 的无穷间断点，所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x} + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{dx}{x\ln^2 x} + \int_1^e \frac{dx}{x\ln^2 x} + \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x},$$

其中积分 $\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{dx}{x\ln^2 x}$ 发散，故原积分发散.

3. 作变换 $\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}=t$，则积分化为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

再作变换 $t^2=y$，则积分进一步化为

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}y^{\frac{1}{2}-1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=1.$$

5.6　定积分的应用

定积分的应用极其广泛. 本节只提出几种简单应用，以阐明运用定积分解决实际问题的方法.

5.6.1　平面图形的面积

计算由曲线所围成的图形面积，可归结为计算曲边梯形的面积. 如果平面图形是由连续曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$，以及直线 $x=a$，$x=b(a<b)$，所围成，并且在 $[a,b]$ 上 $f(x)\geqslant g(x)$（见图 5.11）则面积为

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x, \tag{5.2}$$

不论 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在坐标系中的位置如何，只要曲线 $f(x)$ 与曲线 $g(x)$ 分别为图形的上边界与下边界曲线，上面的式子都是成立的.

类似地，如果平面图形由连续曲线 $x=\varphi(y)$，$x=\psi(y)$，以及直线 $y=c$，$y=d$ 所围成. 并且在 $[c,d]$ 上 $\varphi(y)\geqslant\psi(y)$（见图 5.12），则面积为

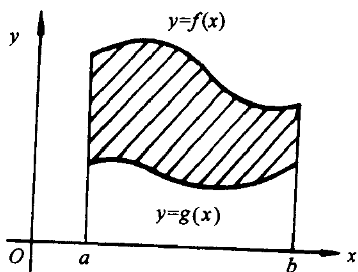


图 5.11

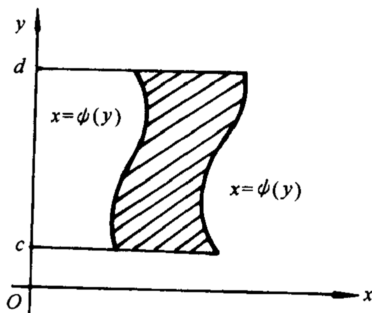


图 5.12

$$A=\int_c^d[\varphi(y)-\psi(y)]\mathrm{d}y. \tag{5.3}$$

例 1　求 $y^2=x$ 与 $y=x^2$ 围成图形的面积.

解　如图 5.13，曲线 $y^2=x$ 与 $y=x^2$ 在第一象限的交点为 $(1,1)$.

所以，两曲线围成的面积

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx$$
$$=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1$$
$$=\frac{1}{3}.$$

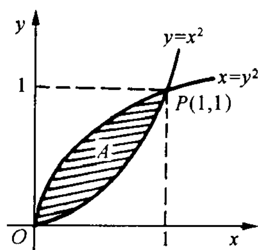


图 5.13

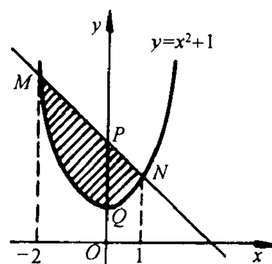


图 5.14

例 2 求由抛物线 $y=x^2+1$ 与直线 $y=3-x$ 所围成图形的面积.

解 如图 5.14

由所给的抛物线与直线的方程作方程组,可以解得它们的交点 M 与 N 的横坐标是 $x=-2$ 与 $x=1$,因此,得

$$A=\int_{-2}^1(3-x)dx-\int_{-2}^1(x^2+1)dx$$
$$=\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^1-\frac{x^3}{3}+x\Big|_{-2}^1$$
$$=10\frac{1}{2}-6=4\frac{1}{2}.$$

例 3 求由曲线 $y^2=2x$ 及直线 $y=x-4$ 所围成图形的面积.

解 如图 5.15.

解方程组

$$\begin{cases} y^2=2x \\ y=x-4 \end{cases}$$

求得曲线与直线的交点为 $A(8,4)$,$B(2,-2)$,则所求的面积为

$$A=\int_{-2}^4\left(y+4-\frac{y^2}{2}\right)dy$$
$$=\frac{y^2}{2}+4y-\frac{y^3}{6}\Big|_{-2}^4$$
$$=18.$$

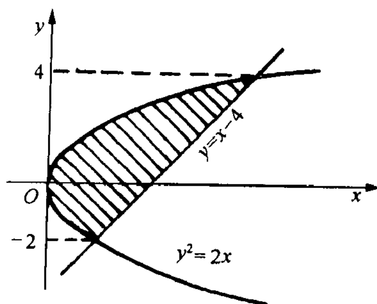


图 5.15

5.6.2　旋转体的体积

平面图形绕着平面内一条直线旋转一周而得的几何体为旋转体. 为简便起见，我们考虑 $y=f(x)(f(x)>0), x=a, x=b, y=0$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周形成的旋转体的体积 V. 如图 5.16

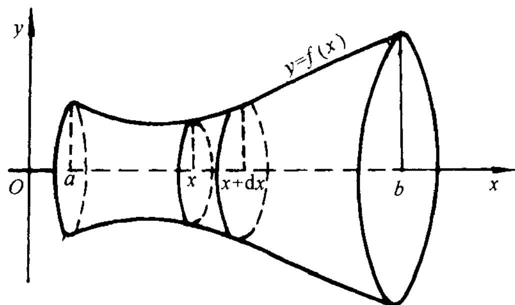


图 5.16

为了求这旋转体的体积 V，我们在$[a,b]$内任取两点 x 及 $x+\mathrm{d}x$，并过这两点分别作垂直于 Ox 轴的截面，则得一薄片. 设这薄片的体积为 ΔV，由于薄片的厚度 $\mathrm{d}x$ 很小，所以薄片体积就可近似地看作是以 $\mathrm{d}x$ 为厚、以 πy^2 为底面积的小圆柱的体积，即

$$\Delta V \approx \pi y^2 \mathrm{d}x.$$

$\pi y^2 \mathrm{d}x$ 称为**体积微元**，记作 $\mathrm{d}V$，即

$$\mathrm{d}V = \pi y^2 \mathrm{d}x.$$

以 $\mathrm{d}V$ 为被积式，在$[a,b]$上求定积分，得整个旋转体的体积为

$$V = \int_a^b \mathrm{d}V = \int_a^b \pi y^2 \mathrm{d}x = \int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x. \tag{5.4}$$

一般地，设实际问题可化为计算在区间$[a,b]$上的某个量 Q，首先，在$[a,b]$内任取两点 $x, x+\mathrm{d}x$，以小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$为代表，以“均匀代不均匀”找出这个量 Q 在该区间上分量 ΔQ 的近似值 $f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\Delta Q \approx f(x)\mathrm{d}x.$$

把近似值 $f(x)\mathrm{d}x$ 称为量 Q 的**微元**，记作 $\mathrm{d}Q$，即

$$\mathrm{d}Q = f(x)\mathrm{d}x.$$

根据定积分的定义，ΔQ 的求和取极限过程，即是以微元 $\mathrm{d}Q$ 作为被积式，在$[a,b]$上作定积分，故

$$Q = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

上述方法称为**微元法**. 此方法的关键是在微小的局部进行数量分析，找出正确的微元表达式.

例 4　已知 $y=x^2$，且 $x\in[0,2]$. 求以 x 轴为旋转轴的旋转体的体积.

解 $V=\int_0^2 \pi y^2 \mathrm{d}x$

$=\int_0^2 \pi\,(x^2)^2 \mathrm{d}x$

$=\pi\int_0^2 x^4 \mathrm{d}x$

$=\pi\left(\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^2$

$=\frac{32}{5}\pi.$

5.6.3 变力所作的功

设质点 M 受力 F 的作用沿直线 OS 运动，力 F 的方向与质点运动的方向一致. 如果力 F 是一常量，则质点 M 在 F 作用下从 a 运动到 b 时，F 所作的功 W 是

$$W=F(b-a).$$

如果力 F 不是常量，而是在 os 上不同点处取不同的值，即力 F 是 s 的函数 $F=F(s)$. 则不能直接应用上面公式来求变力所做的功.

如图 5.17 所示，设在 a,b 两点之间，任取一点 s，并给以微小增量 $\mathrm{d}s$，把[$s,s+\mathrm{d}s$]这一小段上的力视为常量. 此时在 $\mathrm{d}s$ 小段上力 F 所做的功为

$$\mathrm{d}W=F(s)\mathrm{d}s,$$

这就是功的微元.

因此，变力 F 由 a 到 b 这一段上所做的功为

$$W=\int_a^b \mathrm{d}W=\int_a^b F(s)\mathrm{d}s. \tag{5.5}$$

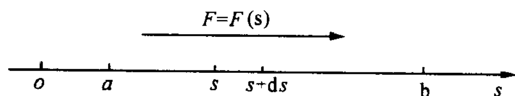


图 5.17

例 5 设一根弹簧的弹性系数为 k，将弹簧由原长在弹性限度内拉长 s，求拉力所做的功.

解 据虎克定律知，拉力 $F=kx$，所以

$$W=\int_0^s F(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^s kx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}ks^2.$$

例 6 把一个带 $+q$ 电量的点电荷放在 x 轴上坐标原点 O 处，它产生一个电场. 该电场对周围的电荷有作用力，作用力的大小为

$$F=k\frac{q}{x^2},$$

其中 x 为另外一个正电荷到原点 O 的距离. 求当单位正电荷在电场中从 $x=a$ 处沿

x 轴移至 $x=b(a<b)$ 处时，电场力 F 对它所做的功.

解

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b F(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b k\frac{q}{x^2}\mathrm{d}x \\ &= kq\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_a^b \\ &= kq\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right). \end{aligned}$$

5.6.4　定积分在医学上的应用

定积分在医药卫生中有着广泛的应用.

例 7　医药学的一级速率过程中，速率的绝对值为 $v=kC_0\mathrm{e}^{-kt}$，其中 C_0 为 $t=0$ 时某种物质的量或浓度，k 为一级速率常数. 求开始至 T 时刻这段时间的平均速率.

解

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{1}{T-0}\int_0^T v(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T kC_0\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t \\ &= \frac{C_0}{T}\int_0^T k\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{C_0}{T}\mathrm{e}^{-kt}\Big|_0^T \\ &= \frac{C_0}{T}(1-\mathrm{e}^{-kT}). \end{aligned}$$

例 8　在某测定胰岛素的实验中，让病人禁食(用以降低体内血糖水平)，通过注射给以大量的糖，假定由实验测得血液中胰岛素浓度 $C(t)$(单位/ml)是下列分段函数

$$C(t)=\begin{cases} t(10-t), & 0\leqslant t\leqslant 5, \\ 25\mathrm{e}^{-k(t-5)}, & t>5, \end{cases}$$

其中 $k=\dfrac{\ln 2}{20}$，时间 t 的单位是分，求一小时内血液中平均胰岛素浓度.

解

$$\begin{aligned} \overline{C(t)} &= \frac{1}{60-0}\int_0^{60}C(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{60}\left[\int_0^5 t(10-t)\mathrm{d}t+\int_5^{60}25\mathrm{e}^{-k(t-5)}\mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{1}{60}\left(5t^2-\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^5+\frac{5}{12}\left(-\frac{1}{k}\mathrm{e}^{-k(t-5)}\right)\Big|_5^{60} \\ &= \frac{1}{60}\left(125-\frac{125}{3}\right)-\frac{5}{12k}(\mathrm{e}^{-55k}-1) \\ &= \frac{25}{18}-\frac{25}{2.079}(0.1487-1) \\ &\approx 11.63\ (\text{单位}/\text{ml}). \end{aligned}$$

例 9　有一段长为 L，半径为 R 的血管，一端血压为 P_1，另一端血压为 P_2（$P_1>P_2$），已知血管截面上距离血管中心为 r 处的血液流速为

$$V(r)=\frac{P_1-P_2}{4\eta L}(R^2-r^2)$$

（式中 η 为血液黏滞系数），求在单位时间内流过该截面的血流量 Q.

解　由于血液有黏性，在血管壁处受到摩擦阻力，血管中心流速比血管壁附近流速大，为此，将血管截面分成许多圆环，在 $[r,r+\mathrm{d}r]$ 上的这一小圆环面上，由于 $\mathrm{d}r$ 很小，环面上各点的流速变化不大，可以认为近似不变，于是可以用圆周处的流速 $V(r)$ 来代替，圆环面积近似为 $2\pi r\mathrm{d}r$，通过小圆环的血流量 ΔQ 的近似值为

$$\Delta Q\approx V(r)\cdot 2\pi r\mathrm{d}r,$$

于是流量微元为

$$\mathrm{d}Q=V(r)\cdot 2\pi r\mathrm{d}r,$$

故

$$\begin{aligned}
Q&=\int_0^R\mathrm{d}Q\\
&=\int_0^R V(r)\cdot 2\pi r\mathrm{d}r\\
&=\int_0^R\frac{P_1-P_2}{4\eta L}(R^2-r^2)\cdot 2\pi r\mathrm{d}r\\
&=\frac{\pi(P_1-P_2)}{2\eta L}\int_0^R(R^2r-r^3)\mathrm{d}r\\
&=\frac{\pi(P_1-P_2)}{2\eta L}\left(\frac{R^2}{2}r^2-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^R\\
&=\frac{\pi(P_1-P_2)R^4}{8\eta L}.
\end{aligned}$$

思考题

1. 用微元法推证本节公式 5.3，即

$$A=\int_c^d[\varphi(y)-\psi(y)]\mathrm{d}y.$$

2. 在本节例 3 中，试用 x 作积分变量求所要求的平面图形的面积.
3. 证明：球体的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，R 为球体的半径.
4. 考虑如何求平面图形绕 y 轴旋转而得的旋转体体积.
5. 设曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，求区间 $[a,b]$ 上曲线的弧长.

思考题解答

1. 在区间$[c,d]$上任取一小区间$[y,y+\mathrm{d}y]$，在这个小区间上，相应的窄条面积近似等于高为$\mathrm{d}y$，底为$\varphi(y)-\psi(y)$的窄矩形的面积，从而得到面积微元

$$\mathrm{d}A=[\varphi(y)-\psi(y)]\mathrm{d}y,$$

从而

$$A=\int_c^d[\varphi(y)-\psi(y)]\mathrm{d}y.$$

2. 取x作积分变量. 过交点B作平行于y轴的直线，则所求平面图形的面积为

$$\begin{aligned}A&=2\int_0^2\sqrt{2x}\mathrm{d}x+\int_2^8[\sqrt{2x}-(x-4)]\mathrm{d}x\\&=2\int_0^2\sqrt{2x}\mathrm{d}x+\int_2^8\sqrt{2x}\mathrm{d}x-\int_2^8(x-4)\mathrm{d}x\\&=2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\Big|_0^2+\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\Big|_2^8-\left(\frac{1}{2}x^2-4x\right)\Big|_2^8\\&=\frac{16}{3}+\frac{38}{3}\\&=18.\end{aligned}$$

3. 以在x轴上方的半圆周曲线$y=\sqrt{R^2-x^2}$绕x轴旋转，即可得球的体积为

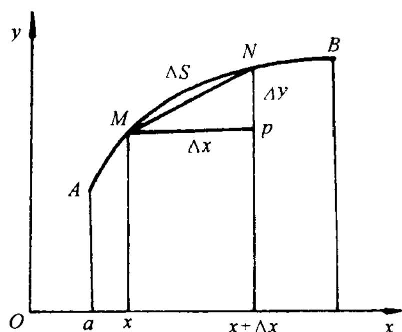
$$\begin{aligned}V&=\int_{-R}^R\pi\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2\mathrm{d}x\\&=\pi\int_{-R}^R(R^2-x^2)\mathrm{d}x\\&=\pi\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-R}^R\\&=\frac{4}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

4. 由曲线$x=g(y)$，直线$y=c,y=d$及y轴所围成的曲边梯形绕y轴旋转一周形成的旋转体的体积为

$$V=\int_c^d\pi[g(y)]^2\mathrm{d}y.$$

具体作法类似于绕x轴旋转的情况. 参见本节公式 5.4 的推导.

5. 在$[a,b]$上任取一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$($\mathrm{d}x$很小)，对应的弧长如下图



$$\Delta S \approx \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\approx \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x,$$

则

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x,$$

因此

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

习　题　5

1. 计算下列定积分

(1) $\int_0^1 (e^{2x} + \sin x)dx$;　　(2) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$;

(3) $\int_0^{\pi} \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}dx$;　　(4) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$;

(5) $\int_0^a \frac{dx}{a+x}$　$(a>0)$;　　(6) $\int_{-3}^3 x^3 dx$;

(7) $\int_0^1 x e^{x^2} dx$;　　(8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^2\theta d\theta$;

(9) $\int_3^8 \frac{y-1}{\sqrt{y+1}}dy$;　　(10) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$;

(11) $\int_{-1}^0 e^{\sqrt{x+1}}dx$;　　(12) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}dx$;

(13) $\int_{-2}^0 \frac{1}{x^2+2x+2}dx$;　　(14) $\int_0^1 x e^{-x}dx$;

(15) $\int_0^1 x^2 e^x dx$;　　(16) $\int_0^1 x^2 \arctan x dx$;

(17) $\int_0^1 e^x \cos 2x dx$;　　(18) $\int_1^e \sin(\ln x)dx$;

(19) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx$;　　(20) $\int_1^3 \frac{1}{x+x^2}dx$.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} 6x^2+1, & -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ x^2, & 0 < x \leqslant 2. \end{cases}$

计算 $\int_{-2}^2 f(x)dx$.

3. 将[0,1]8 等分,分别用矩形法、梯形法和辛普生法计算 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$. 保留 4 位小数.

4. 求函数 $y=2x+3$ 在区间[0,4]上的平均值.

5. 一长为 3cm 的细棒,棒的一端与原点重合,棒上任一点 x 的密度 $\rho=6-\frac{x^2}{4}$ 克/厘米,求棒的平均密度.

6. 计算下列广义积分

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$;　　(2) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$　$(a>0)$;

(3) $\int_0^{+\infty} x\cos x dx$;　　(4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{4x^2+1}dx$;

(5) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$； (6) $\int_0^e \ln x\mathrm{d}x$；

(7) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x(x-2)}\mathrm{d}x$； (8) $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}\mathrm{d}x$.

7. 证明广义积分$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n}\mathrm{d}x$，当 $n>1$ 时收敛；当 $n\leqslant 1$ 时发散.

8. 计算下列曲线所围成图形的面积.

(1) $y=\ln x, y=0, x=4$；

(2) $y=2x, y=3-x^2$；

(3) $y=e^x, y=2x$；

(4) $y=2x+3, y=x^2$.

9. 利用 Γ 函数计算下列广义积分的值：

(1) $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x}\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^{+\infty} x^{\frac{3}{2}} e^{-2x}\mathrm{d}x$.

10. 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转的旋转体体积.

11. 求 $y=x^2$ 及 $y=1, x=0$ 围成的图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

12. 求 $y=x^{\frac{3}{2}}(0\leqslant x\leqslant 4)$的弧长.

13. 已知 n 为自然数，证明

$$2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot 2n=2^n\Gamma(n+1).$$

14. 测得药物从尿中排泄的速率为

$$v(t)=te^{-kt} \qquad (k>0),$$

求从时间 $t=0$ 到 $t=T$ 排泄的总药量 Q，及 $T\to+\infty$时 Q 的极限.

15. 某质点运动的速度为

$$v=v_0+at,$$

其中 a 为加速度，v_0 为初始速度，求在$[0,T]$这段时间内经过的路程.

16. 把质量为 m 的物体从地面升高到高度为 h 的位置需做多少功？若使物体远离到无穷远处，则功等于多少？(提示：$F=mg\frac{R^2}{r^2}$，r 表示物体离地心的距离，R 是地球半径.)

习题 5 答案

1. (1) $\frac{1}{2}e^2-\cos1+\frac{1}{2}$，　(2) $\frac{\pi}{6}$，　(3) -2，　(4) $\frac{\pi}{6}$，

   (5) $\ln2$，　(6) 0，　(7) $\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$，　(8) $\frac{1}{3}$，　(9) $\frac{26}{3}$，

   (10) $2-\frac{\pi}{2}$，　(11) 2，　(12) $\frac{\pi}{6}$，　(13) $\frac{\pi}{2}$，

   (14) $1-2e^{-1}$，　(15) $e-2$，　(16) $\frac{1}{12}(\pi-2-2\ln2)$，

   (17) $\frac{e}{5}(2\sin2+\cos2)-\frac{\pi}{10}$，　(18) $\frac{e}{2}(\sin1-\cos1)+\frac{1}{2}$，

   (19) $\frac{\pi}{3}+\sqrt{\frac{3}{2}}$，　(20) $\ln\frac{3}{2}$.

2. 22.
3. 0.8785，　0.7847，　0.7854.
4. 7.
5. $5\frac{1}{4}$克.
6. (1) 发散，　(2) $\frac{1}{a}$，　(3) 发散，　(4) 发散，　(5) $\frac{\pi}{2}$，　(6) -1，

   (7) 发散，　(8) $\frac{\pi}{2}$.
7. 略.
8. (1) $8\ln2-3$，　(2) $10\frac{2}{3}$，　(3) $2e\ln2+1$，　(4) $10\frac{2}{3}$.
9. (1) 24，　(2) $\frac{3}{16}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$　(提示:设 $2x=t$).
10. $\frac{4}{3}\pi ab^2$.
11. $\frac{\pi}{2}$.
12. $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$.
13. 略.
14. $Q=\frac{1}{k^2}-e^{-kT}\left(\frac{T}{k}+\frac{1}{k^2}\right)$，$\lim\limits_{T\to+\infty}Q=\frac{1}{k^2}$.
15. $v_0T+\frac{a}{2}T^2$.
16. $W_h=\frac{mgRh}{R+h}$，$W_\infty=mgR$.

第 6 章

多元函数微积分

前面重点讨论了只有一个自变量的一元函数的微积分问题.而在实际中,研究的问题往往牵涉到多方面的因素,反映到数学上,就是一个变量依赖于多个变量的情形.这就提出了多元函数以及多元函数的微积分问题.多元函数微积分学是一元函数微积分学的推广.两者在概念、理论与研究方法上有类似之处,但也存在着很大的差别.本章讨论中以二元函数为主,相应的一些结果,可以毫无本质区别地推广到二元以上的函数上去.

6.1 空间解析几何简介

6.1.1 空间直角坐标系

在空间任选一点 O,过 O 点作 3 条两两垂直的数轴 Ox、Oy 和 Oz,3 条数轴的指向习惯上按右手系确定,这样就构成了**空间直角坐标系**(space rectangular coordinate system)(图 6.1).其中 O 称为坐标**原点**(origin),Ox、Oy 和 Oz 分别简称为 x 轴、y 轴、z 轴,并统称为**坐标轴**(Coordinate Axis).

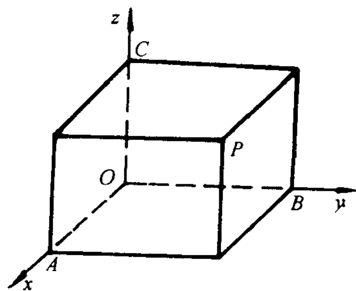


图 6.1

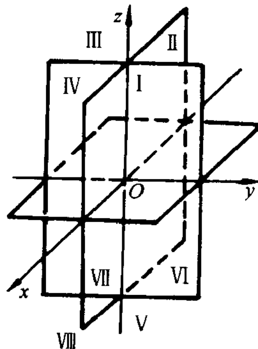


图 6.2

三条坐标轴中每两条所决定的平面 xOy、yOz 和 zOx 称为**坐标面**(coordinate plane). 三个坐标面把整个空间分成 8 个部分，每一部分称为一个**卦限**(octant). 我们把 xOy 坐标面的第一、二、三、四象限的上部分空间依次叫做第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限，四个象限的下部分依次叫做第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限，如图 6.2 所示.

设 P 为空间任一点，过 P 点作三个平面分别与三条坐标轴垂直且交于点 A,B 和 C. 设 A,B,C 在 x,y,z 轴的坐标分别为 x,y,z，则空间点 P 必须对应这样一个有顺序的数组 (x,y,z)；反之，对于一个有顺序的组数 (x,y,z)，我们在 x,y,z 轴上分别取坐标为 x,y,z 的三点 A,B,C，然后过这些点分别作 x,y,z 轴的垂直平面，由三个平面就可确定空中惟一的交点 P. 这样，就建立了空间一点 P 和有序数组 (x,y,z) 之间的一一对应关系. 我们称这个有序数组为点 P 的**坐标**(coordinate)，记作 $P(x,y,z)$，x 叫做点 P 的**横坐标**，y 叫做点 P 的**纵坐标**，z 叫做点 P 的**竖坐标**. 显然，原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$.

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点，过 P_1 和 P_2 各作 3 个平面分别垂直于坐标轴，这 6 个平面围成一个以 P_1P_2 为对角线的长方体. 容易看出它的 3 个棱的长度分别为 $|x_2-x_1|$，$|y_2-y_1|$，$|z_2-z_1|$，如图 6.3. 因此，

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{6.1}$$

这就是空间直角坐标系中**两点间距离公式**.

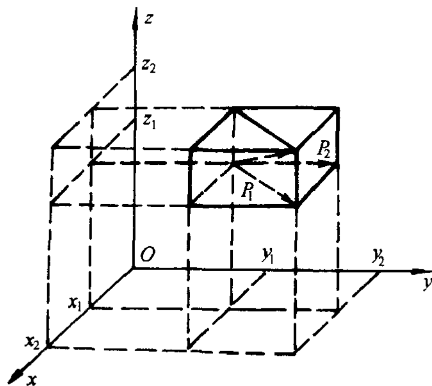


图 6.3

特别地，点 $P(x,y,z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 之间的距离为

$$|OP| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 1　求点 $P_1(2,-1,4)$ 和点 $P_2(1,0,0)$ 之间的距离.

解　$|P_1P_2| = \sqrt{(2-1)^2+(-1-0)^2+(4-0)^2}$

$= 3\sqrt{2}$.

6.1.2 空间平面与二次曲面

我们知道，空间中任一点是用一组实数(x,y,z)来表示的，同样，空间中的任一曲面(包括平面)就可以用含x,y,z的一个方程来表示，即$F(x,y,z)=0$，凡在这曲面上的点的坐标都满足这个方程，不在曲面上的点的坐标都不满足方程，这个方程叫做**曲面方程**.

凡是坐标(x,y,z)满足两个方程

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

的点，在空间也构成一个图形，它就是空间中的曲线(直线是特殊情况)，因此空间曲线可看成两个曲面的交线.

(1) 空间平面

一般说来，空间中一个平面可用一个三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

来表示，其中A,B,C不全为零.

特别地，

$Ax+By+Cz=0$　表示通过原点的平面.

$Ax+By+D=0$　表示与z轴平行的平面.

$Ax+D=0$　表示与平面yOz平行的平面.

$x=0$　表示yOz平面.

方程$Ax+By+Cz+D=0$中缺哪一个坐标，则该平面平行于相应的那条坐标轴；若此时常数项又为零，则该平面经过那条坐标轴；若方程缺两个坐标，则平面就平行于相应那两条坐标轴所确定的坐标平面；若此时常数项又为零，则平面与该坐标平面重合.

(2) 二次曲面

三元二次方程所表示的曲面为**二次曲面**(quadratic surface).

在空间直角坐标系中，二次方程$F(x,y,z)=0$所表示的曲面(二次曲面)的形状，一般采用“平行截口法”来研究. 即用平行于各坐标面的平面去截曲面，得到一些截口图形，而掌握了各截口的图形就可以大致想像出该曲面的空间形状.

下面是一些常见二次曲面(表6.1).

表 6.1

名　称		方　程	图　形	在坐标面上的截痕
球面		$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 球心(a,b,c)		圆
椭球面		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ a,b,c 为椭球的半轴		椭　圆
柱面	圆柱面	$x^2+y^2=R^2$		在 xOy 面上为圆
	椭圆柱面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$		在 xOy 面上为椭圆
	双曲柱圆	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$		在 xOy 面上为双曲线
	抛物柱面	$x^2-2py=0$		在 xOy 面上为抛物线

续表 6.1

名称		方程	图形	在坐标面上的截痕
双曲面	单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$		在 xOy 面上为椭圆，在 xOz 面和 yOz 面上为双曲线
	双叶双曲面	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$		在 xOz 面上无截痕，在 xOy 面和 yOz 面上截痕都是双曲线
抛物面	椭圆抛物面	$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ a,b 同号，$a=b$ 时为旋转抛物面		在 xOy 面上为一点，在 xOz 面和 yOz 面上皆为开口向上的抛物线
	双曲线抛物面（马鞍面）	$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$		在 xOy 面上截痕为两条相交直线，在 xOz 面上为开口向下的抛物线，在 yOz 面上为开口向上的抛物线
锥面		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 当 $a=b$ 时为圆锥面		在 xOy 面上为一点，在 xOz 面和 yOz 面上各为两条相交直线

思考题

1. 坐标面和坐标轴上的点有什么特点？

2. 求出点(a,b,c)关于：(1)各坐标平面；(2)各坐标轴；(3)坐标原点的对称点的坐标.

3. 说明空间两点间距离公式是平面解析几何中两点间距离公式的推广.

思考题解答

1. 在坐标面 xOy、yOz、zOx 上点的坐标分别为$(x,y,0)$，$(0,y,z)$，$(x,0,z)$，在 x 轴，y 轴，z 轴上的点的坐标分别为$(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$.

2. (1)关于 xOy、yOz、zOx 坐标面的对称点依次为$(a,b,-c)$，$(-a,b,c)$，$(a,-b,c)$；

(2)关于 x,y,z 轴对称的点依次为$(a,-b,-c)$，$(-a,b,-c)$，$(-a,-b,c)$；
(3)关于原点对称的点为$(-a,-b,-c)$.

3. 当空间中的点某一坐标为零，则点落在相应平面上，这时讨论两点之间的距离就转化为讨论平面两点之间距离.

6.2　多元函数的基本概念

6.2.1　平面点集与区域

为了便于研究，与一元函数一样，我们先给出点集、邻域、内点、开区域等概念.

平面上具有某种共同性质的点的全体称为平面上的一个**点集**(point set).

全平面记作$\{(x_1,x_2)|x_1,x_2\in\mathbf{R}\}=\mathbf{R}^2$ 叫做二维空间，三维空间记作$\{(x_1,x_2,x_3)|x_1,x_2,x_3\in\mathbf{R}\}=\mathbf{R}^3$，$\mathbf{R}$ 为实数集. 相应地，可推广到 n 维空间，记作$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}=\mathbf{R}^n$.

以点 $P_o(x_o,y_o)$为心，$\delta>0$ 为半径的圆内的一切点 $P(x,y)$所组成的点集称为点 P_o 的邻域，显然邻域内的点均满足$\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}<\delta$.

如果点 P 的某个邻域内的点都属于点集 D，则称点 P 为点集 D 的**内点**(interior point). 若点 P 的任何邻域中既有属于 D 的点，也有不属于 D 的点，则称 P 为 D 的**边界点**(boundary point)(图 6.4). 由全部内点和以闭曲线为边界的全部边界点组成的点集称为**闭区域**(closed domain)；仅由内点组成的区域称为**开区域**(open domain). 一般说区域是指开区域. 这些概念不难推广到三维空间.

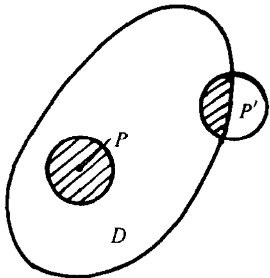


图 6.4

6.2.2 多元函数的概念

在很多自然现象以及实际问题中，经常会遇到多个变量之间的依赖关系，举例如下：

例 1 圆柱体的体积 V 和它的底面半径 r，高 h 之间具有关系

$$V = \pi r^2 h,$$

这里，V 是随着 r,h 的变化而变化的，当 r,h 在一定范围($r>0,h>0$)内取定一对值时，V 的对应值就随之确定.

例 2 一定质量的理想气体，它的压强 P 和体积 V 与绝对温度 T 之间的关系是

$$P = R\frac{T}{V}(R\text{ 是常数}),$$

这里，当 V 和 T 在某一范围($T>0,V>0$)内每取定一组值时，就可以得到一个确定的 P 值.

这样的例子还可以举出很多.这些例子的具体意义虽各不相同，但它们却有一个共同的性质，抽出这些共性就可得出二元函数的定义.

定义 1 设在一个变化过程中，有 3 个变量 x,y 和 z，D 是平面的一个点集. 如果在 D 中任意取定一点(x,y)时，变量 z 按照一定的规律，总有确定的数值和这一对值对应，则 z 叫做 x,y 的**二元函数**(bivariate function)，记作

$$z = f(x,y) \text{ 或 } z = z(x,y),(x,y) \in D,$$

其中变量 x,y 叫做**自变量**，而 z 叫**因变量**. 使 z 有意义的自变量取值区域称为函数的**定义域**.

若点$(x_0,y_0)\in D$，则对应值 $z_0=f(x_0,y_0)$称为**函数值**.

例如：函数 $z=f(x,y)=\frac{10x}{x^2+y^2}$，当 $x=1,y=2$ 时的函数值为

$$f(1,2) = \frac{10\cdot 1}{1^2+2^2} = 2.$$

函数值的全体称为**值域**.

类似可定义三元函数、四元函数等等. 我们把具有两个和两个以上的自变量的函数称为**多元函数**(multivariate function). 本章的重点在于研究二元函数.

二元函数 $z=f(x,y)$的几何意义，在三维空间内一般表示一张曲面(平面是曲面的特例). 三元函数 $u=f(x,y,z)$在三维空间不能直观地表示出来，但它的定义域可用一个空间区域来表示. 四元和四元以上的函数，连定义域也难以用几何图形表示了.

例 3 求函数 $z=\ln(x+y)$的定义域.

解 对数函数要求 $x+y>0$. 故此函数的定义域 $D=\{(x,y)|x+y>0\}$为直线 $x+y=0$ 的上方(图 6.5 中阴影部分)的点. 所以这个函数的定义域是半个平面.

例 4　求函数 $z=f(x,y)=\sqrt{y-x}\arcsin\left(\dfrac{x^2+y^2}{4}\right)$ 的定义域.

解　根据根式和反正弦的定义要求，函数 $f(x,y)$ 的定义域为

$$\begin{cases} y-x\geqslant 0, \\ \left|\dfrac{x^2+y^2}{4}\right|\leqslant 1. \end{cases}$$

显然，这个定义域是由直线 $y=x$ 和左上半圆围成的一个闭区域(图 6.6).

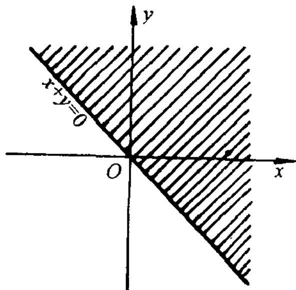


图 6.5

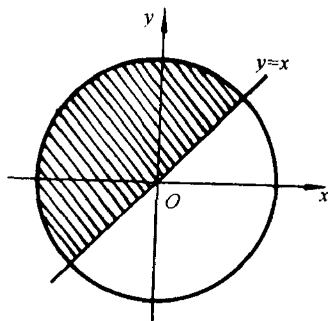


图 6.6

6.2.3　二元函数的极限

和一元函数类似，讨论二元函数 $z=f(x,y)$ 的极限，就是讨论当自变量 $x\to x_0$，$y\to y_0$，即点 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$，或点 P 到 P_0 的距离

$$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$$

时，函数 $z=f(x,y)$ 的变化趋势.

定义 2　设函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的附近有定义(点 P_0 可以除外)，若点 P 以任何方式无限趋近于点 P_0 时，函数的对应值 $f(x,y)$ 无限接近于一个常数 A，则称 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 或 $\rho\to 0$ 时的**极限**，记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \quad 或 \quad \rho\to 0\text{ 时}, f(x,y)\to A.$$

也可用"ε-δ"的语言来叙述：对于任意给定的正数 ε，无论它怎样小，都存在着一个正数 δ，使得当 $0<\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，不等式 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 都成立，则称常数 A 是 $f(x,y)$ 在 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时的极限.

一元函数的极限运算法则可以推广到多元函数的情况.

例 5

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)}\frac{2x-y}{x+2y}=\lim_{\substack{x\to -1\\ y\to 2}}\frac{2x-y}{x+2y}$$

$$= \frac{\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to 2}} (2x - y)}{\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to 2}} (x + 2y)} = \frac{\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to 2}} 2x - \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to 2}} y}{\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to 2}} x + \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to 2}} 2y}$$

$$= \frac{2\cdot(-1) - 2}{-1 + 2\cdot 2} = -\frac{4}{3}.$$

应该注意，对于二元函数，极限是指 $P(x,y)$ 以任何方式趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数都无限接近于 A. 因此，如果 $P(x,y)$ 仅以某一特殊方式，例如沿着一条直线或某一曲线趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，即使函数无限接近于某一确定值，还不能由此断定函数的极限存在. 但是，如果当 $P(x,y)$ 以不同方式趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数趋近于不同的值，那么就可以断定这函数的极限不存在. 下面用例子来说明这种情形.

例 6 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限.

解 当点 $P(x,y)$ 沿 x 轴 $(y=0)$ 趋近于点 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

又当点 $P(x,y)$ 沿 y 轴 $(x=0)$ 趋近于点 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

虽然点 $P(x,y)$ 以上述两种特殊方式（沿 x 轴或 y 轴）趋近于原点时函数的极限存在并且相等，但是极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 并不存在.

这是因为当点 $P(x,y)$ 沿着直线 $y=kx$ 趋近于点 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

显然它是随着 k 的不同而改变的.

对于 $f(x,y)$，先将 y 固定，视 $f(x,y)$ 为 x 的函数，再求 $x\to x_0$ 的极限，得极限函数 $F(y)$，然后再令 $y\to y_0$，若有极限 A，则这个极限就称为二次极限，记作 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=A$. 类似地，可定义另一个二次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=B$.

6.2.4 二元函数的连续性

有了二元函数的极限概念，类似一元函数连续的定义，可给出二元函数的连续定义.

定义 3　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内(包括点 P_0)有定义,并且有

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

成立,则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处**连续**.

如果二元函数在区域 D 内各点都连续,那么就称函数在 D 内连续. 二元连续函数的图形是一个无空隙、无裂缝的曲面.

例如连续函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}\,(x^2+y^2\leqslant 1)$ 的图形是球心在原点、半径等于 1 的上半球面.

二元连续函数也具有一元连续函数的相同性质. 如连续函数的和、积、商、复合仍是连续函数,多元初等函数在其定义域内连续等等,这里不一一详述.

函数的不连续点称为**间断点**.

上面已讨论过的函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$$

当 $x\to 0, y\to 0$ 时的极限不存在,所以点 $(0,0)$ 是函数的一个间断点.

上面的概念可以推广到二元以上的函数.

思考题

1. 方程 $F(x,y,z)=0$ 确定了一个几元函数? 其自变量是哪些变量?

2. 如果点 $P(x,y)$ 有无穷多种方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数均趋于数 A,则此函数的极限为 A 吗? 为什么?

3. 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在,是否 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 或 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在?

4. 二次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 或 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在,是否极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 一定存在?

5. 若二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续,则一元函数 $z=f(x,y_0)$ 在点 $x=x_0$ 连续; $z=f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处连续,为什么?

思考题解答

1. 确定了一个二元函数, $z=f(x,y)$ 或 $y=g(x,z)$ 或 $x=h(y,z)$. 其自变量分别为 x 和 y, x 和 z, y 和 z.

2. 不一定. 因为无穷多种方式并不一定包含所有的趋向方式.

3. 不一定. 例如$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x})$.

4. 不一定. 如

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

5. 特别考虑 $P(x,y)$沿直线 $y=y_0$ 和 $x=x_0$ 趋于(x_0,y_0)点，则有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)=f(x_0,y_0)$及$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}f(x_0,y)=f(x_0,y_0)$.

6.3 偏 导 数

6.3.1 一阶偏导数

在研究一元函数时，从研究函数的变化率出发引入了导数的概念. 对于多元函数同样需要讨论它的变化率. 但多元函数的自变量不止一个，因变量与自变量的关系要比一元函数复杂得多. 在这一节里，首先考虑多元函数关于其中一个自变量的变化率.

以二元函数 $z=f(x,y)$为例，如果只有自变量 x 变化，而自变量 y 固定(即看成常量)，这时它就是 x 的一元函数. 函数对 x 的导数，就称为二元函数 z 对于 x 的偏导数，即有如下定义：

定义 1 设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内有定义，将 y 固定在 y_0，而 x 在 x_0 处有增量 Δx，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称极限值为函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处**对自变量 x 的偏导数**. 记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\quad 或\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\quad 或\quad f'_x(x_0,y_0),$$

其中 $\Delta z_x=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$被称为函数在该点**对 x 的偏增量**(ppartial increment).

若将 x 固定在 x_0，而 y 在 y_0 处有增量 Δy 时，有极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在，则称极限值为函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处**对自变量 y 的偏导数**. 记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\quad 或\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\quad 或\quad f'_y(x_0,y_0),$$

其中 $\Delta z_y=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$称为函数在该点**对 y 的偏增量**.

如果函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内每一点(x,y)处对 x 的偏导数都存在，那么

这个偏导数就是 x,y 的函数，它就称为函数 $z=f(x,y)$ **对自变量 x 的偏导函数**，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x},z'_x \quad 或 \quad f_x(x,y).$$

类似地，可以定义函数 $z=f(x,y)$ **对自变量 y 的偏导函数**，记作

$$\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial y},z'_y \quad 或 \quad f'_y(x,y).$$

由偏导数的概念可知，$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$，显然就是偏导函数 $f'_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值；$f'_y(x_0,y_0)$ 就是偏导函数 $f'_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值. 就像一元函数的导函数一样，在不致误解的情况下，仍简称**偏导数**(partial derivative).

根据偏导数定义，求多元函数的偏导数的方法与一元函数求导数的方法完全一样. 所有一元函数的求导公式和求导法则对多元函数都是适用的. 只要记住对某一自变量求导时，把其余的自变量都看作常量就行了. 二元函数有两个偏导数.

二元以上的多元函数的偏导数与二元函数的情形相似.

例 1　求 $z=f(x,y)=\ln(x+y^2)$ 在点 $(1,0)$ 的偏导数.

解　因为

$$f'_x(x,y)=\frac{1}{x+y^2},$$

故

$$f'_x(1,0)=\frac{1}{1+0^2}=1.$$

又因为

$$f'_y(x,y)=\frac{2y}{x+y^2},$$

故

$$f'_y(1,0)=0.$$

例 2　理想气体状态方程 $PV=RT$，其中 R 是常量，求证

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-1.$$

证明　理想气体状态方程中任何一个变量都可作为其他两个变量的函数：

$$P=\frac{RT}{V},V=\frac{RT}{P},T=\frac{PV}{R},$$

因而，得

$$\frac{\partial P}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2},\ \frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{P},\ \frac{\partial T}{\partial P}=\frac{V}{R}.$$

于是

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{P}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{RT}{PV}=-1.$$

函数 $z=f(x,y)$ 表示空间一曲面，如果将 y 固定为 y_0，那么，曲面与平面 $y=y_0$ 的交线 Cx 就是一条平面曲线，它的方程是

$$\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=y_0. \end{cases}$$

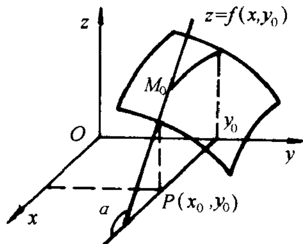


图 6.7

由于函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 就是一元函数 $f(x,y_0)$ 在 x_0 处的导数. 因此，由一元函数导数的几何意义知，$f'_x(x_0,y_0)$ 是曲线 Cx 在 M 点切线对 x 轴的斜率(图 6.7)，即

$$f'_x(x_0,y_0)=\tan\alpha.$$

对 $f'_y(x_0,y_0)$ 也有类似的几何意义.

一元函数导数存在必定连续，而二元函数即使偏导数存在也不一定连续.

例 3 求二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

在点(0,0)的偏导数.

解

$$\begin{aligned} f'_x(0,0) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} 0, \\ &= 0. \end{aligned}$$

同样

$$\begin{aligned} f'_y(0,0) &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y\to 0} 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

但在第二节中已经知道函数在点(0,0)并不连续.

6.3.2 高阶偏导数

设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)\ ,\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)\ .$$

一般来说，在 D 内 $f'_x(x,y)$ ，$f'_y(x,y)$均是 x,y 的函数. 如果这两个函数的偏导数也存在，则称它们是函数 $z=f(x,y)$的**二阶偏导数**. 依照对变量求导的次序不同而有 4 个二阶偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)=z''_{xx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)=z''_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)=z''_{yx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)=z''_{yy},$$

其中$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$称为 $z=f(x,y)$的**二阶混合偏导数**.

同样可定义更高阶的偏导数. 二阶及二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**(higher partial derivatives).

例 4　求函数 $z=x^2y-xy^2-xy$ 的二阶偏导数.

解　因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy-y^2-y\ ,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=x^2-2xy-x,$$

故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y\ ,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x-2y-1\ ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2x-2y-1\ ,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2x\ .$$

在例中，两个混合偏导数虽然求导次序不同，但其结果却相等. 那么，一般什么样的二元函数才具有这样的特性呢？

定理 1　如果函数 $z=f(x,y)$的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$在区域 D 内连续，那么在 D 内一定有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

证明从略.

换句话说，二阶混合偏导数在连续的条件下与求导的次序无关.

对于二元以上的导数，也可以类似地定义高阶偏导数. 而且高阶混合偏导数在

偏导数连续的条件下也与求导的次序无关.

例 5 求 $z=x^3y-3x^2y^3$ 的二阶偏导数.

解 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-6xy^3,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^3-9x^2y^2,$$

故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy-6y^3,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-18x^2y\ ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3x^2-18xy^2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial z}=3x^2-18xy^2.$$

例 6 证明函数 $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

证明

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x$$

$$=-x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

因为函数 u 中变量 x,y,z 所处地位相同,可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+3y^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+3z^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$=-3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$=0\ .$$

这个偏微分方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ 叫做**拉普拉斯方程**(laplace equation),是数学、物理中一个极其重要的方程.

思考题

1. 在二元函数中，偏导数$\frac{\partial z}{\partial y}$是 ∂z 与 ∂y 之商吗？为什么？

2. 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，函数 z 在点 (x_0,y_0) 处偏导数一定存在吗？为什么？

3. 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数存在，则函数 z 在点 (x_0,y_0) 处极限是否一定存在？举例说明.

4. 偏增量与偏导数有什么关系？

5. 求分段函数的偏导数应注意什么？

思考题解答

1. 不是. 它是一个完整的记号，不能看作商或分数，虽然有时也叫偏微商，但单独的记号 $\partial z,\partial y$ 没有什么意义.

2. 不一定. 如 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 连续，但

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1,\Delta x\to 0^+,\\-1,\Delta x\to 0^-,\end{cases}$$

从而 $f'_x(0,0)$ 不存在.

3. 不一定. 如 $f(x,y)=\begin{cases}1,xy=0,\\0,xy\neq 0,\end{cases}$ $(x_0,y_0)=(0,0)$，此函数在 x 轴，y 轴上取值为 1，其余各点为 0，显然$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=0$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0$，而在原点 $(0,0)$ 的任何邻域内都会有函数值为 0 和 1 的点，因而无论 (x,y) 多么接近 $(0,0)$，其函数值始终不可能与某一确定值之间的距离任意小. 即 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 不趋近于任何确定值（无极限）.

4. $\frac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z_x}{\Delta x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z_y}{\Delta y}$.

5. 计算分段函数区域分界点 (x_0,y_0) 处的偏导数时，需根据偏导数的定义计算：

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},$$

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

其余点处的偏导数，利用类似一元函数求导公式和求导法则计算.

6.4 全微分及其应用

偏导数给出的是一个自变量变化、另外的自变量作为常数的函数变化率. 更一般地,当所有自变量都变化时,函数的变化如何? 这就是全微分要考虑的问题.

6.4.1 全增量和全微分的概念

前面已讲,对二元函数 $z=f(x,y)$,如果在点 (x,y) 只对 x 给以增量 Δx,或只对 y 给以增量 Δy,则分别得偏增量 $\Delta z_x=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$,或 $\Delta z_y=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$. 现在,对二元函数 $z=f(x,y)$,在点 (x,y) 给 x 以增量 Δx,同时也给 y 以增量 Δy,则差

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

叫做函数在点 (x,y) 的**全增量**(total increment).

一般说来,计算全增量 Δz 比较复杂,与一元函数的情形一样,希望用自变量的增量 $\Delta x,\Delta y$ 的线性函数来近似地代替函数的全增量 Δz,从而给出如下定义.

定义 1 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 及其邻域内有定义. 若 z 在点 $P(x,y)$ 的全增量

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

可以表示成

$$\Delta z = A\,\Delta x + B\Delta y + O(\rho),$$

其中,A,B 与 $\Delta x,\Delta y$ 无关,$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$,在 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ 时,$O(\rho)$ 是比 ρ 高阶的无穷小. 则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处可微,Δz 关于 $\Delta x,\Delta y$ 的主要线性部分 $A\Delta x+B\Delta y$ 被称为 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处的**全微分**(total differential),记作 $\mathrm{d}z$,即

$$\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y.$$

现在假设已知函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可微,我们来看如何确定 A,B.

因为 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+O(\rho)$ ($\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{O(\rho)}{\rho}=0$) 对一切的 $\Delta x,\Delta y$ 都成立,特别对 $\Delta y=0$ 自然也成立.

因此令 $\Delta y=0$,则 $\rho=|\Delta x|$. 这样

$$\begin{aligned}\Delta z &= A\Delta x + O(\rho) = A\Delta x + O(|\Delta x|)\\ &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)\\ &= f(x+\Delta x, y) - f(x,y)\\ &= \Delta z_x,\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{\Delta z_x}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\\ &= \frac{A\Delta x + O(|\Delta x|)}{\Delta x}\\ &= A + \frac{O(|\Delta x|)}{\Delta x}.\end{aligned}$$

由于 A 与 Δx 无关，所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(A + \frac{O(|\Delta x|)}{\Delta x}\right)\\ &= A.\end{aligned}$$

这就证明了$\frac{\partial z}{\partial x}$存在且$\frac{\partial z}{\partial x}=A$.

同理可证$\frac{\partial z}{\partial y}$存在且$\frac{\partial z}{\partial y}=B$.

从而就可得出结论：如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可微，则 $f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$都存在，且

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z &= f_x'(x,y)\Delta x + f_y'(x,y)\Delta y\\ &= \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.\end{aligned}$$

特别当 $z=f(x,y)=x$ 时，可得出 $\mathrm{d}x=\Delta x$，同理 $\mathrm{d}y=\Delta y$，于是全微分公式又可写作

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

其中$\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x$，$\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$ 分别称为函数 z 关于 x，y 的**偏微分**(partial differential).

例 1　求函数 $z=y^2\sin 3x$ 的全微分.

解　因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3y^2\cos 3x,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y\sin 3x,$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z &= \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\\ &= 3y^2\cos 3x\mathrm{d}x + 2y\sin 3x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

例 2　求函数 $z=\mathrm{e}^{xy}$在点(2,1)处的全微分.

解　因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\mathrm{e}^{xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = x\mathrm{e}^{xy},$$

所以

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=e^2,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=2e^2.$$

所以在点(2,1)处，$dz=e^2dx+2e^2dy$.

我们知道，一元函数在某点的导数存在则微分也存在，反之也成立. 但对于二元函数来说，情形就不同了. 换句话说，二元函数各偏导数存在但不一定能推出全微分存在.

但是，如果再假定函数的各偏导数连续，则可保证全微分存在，即有下面定理.

定理 1　如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在且连续，则函数在该点可微. 证明从略.

在实际问题中遇到的函数绝大多数的偏导数是连续的，因而函数常常是可微的.

可以类似地定义多于两个自变量的多元函数的全微分. 例如若三元函数 $\mu=f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 的 3 个偏导数存在且连续，则有全微分 $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$.

例 3　求函数 $W=\sin(x+2y+3z)$ 的全微分.

解　因为

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\cos(x+2y+3z),$$

$$\frac{\partial W}{\partial y}=2\cos(x+2y+3z),$$

$$\frac{\partial W}{\partial z}=3\cos(x+2y+3z).$$

所以

$$\begin{aligned}dW&=\frac{\partial W}{\partial x}dx+\frac{\partial W}{\partial y}dy+\frac{\partial W}{\partial z}dz\\&=\cos(x+2y+3z)dx+2\cos(x+2y+3z)dy\\&\quad+3\cos(x+2y+3z)dz.\end{aligned}$$

6.4.2　全微分在近似计算中的应用

据前面的讨论知道，若函数在点 $P(x,y)$ 可微，则

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y,\quad \Delta z=dz+O(\rho),$$

$$\left(\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\\Delta y\to 0}}\frac{O(\rho)}{\rho}=0\right).$$

显然,它同一元函数一样具备这样两个特点:① dz 是关于 $\Delta x,\Delta y$ 的线性函数;② 当 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ 时,dz 与 Δz 只相差一个比 ρ 更高阶的无穷小.

从而当 $|\Delta x|,|\Delta y|$ 都较小时,函数的全增量可用全微分近似代替.

即

$$\Delta z \approx dz = f_x'(x,y)\Delta x + f_y'(x,y)\Delta y. \tag{6.2}$$

上式也可以写成

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y) \approx f(x,y) + f_x'(x,y)\Delta x + f_y'(x,y)\Delta y. \tag{6.3}$$

与一元函数的情形相类似,可利用上面两个公式做近似计算.

例 4　计算 $(1.04)^{2.02}$ 的近似值.

解　设函数 $f(x,y)=x^y$. 显然,要计算的值就是函数 $x=1.04,y=2.02$ 时的函数值 $f(1.04,2.02)$.

取 $x=1,y=2,\Delta x=0.04,\Delta y=0.02$.

由于 $f(1,2)=1$,

$$f_x'(x,y) = yx^{y-1},\quad f_y'(x,y) = x^y\ln x,$$

$$f_x'(1,2) = 2,\quad f_y'(1,2) = 0.$$

所以,应用公式(6.3)便有

$$(1.04)^{2.02} \approx 1 + 2\times 0.04 + 0\times 0.02 = 1.08.$$

例 5　有一圆柱体受压后发生变形,它的半径由 20 cm 增大到 20.05 cm,高度由 100 cm 减少到 99 cm,求此圆柱体体积变化的近似值.

解　圆柱体的体积 $V=\pi r^2 h$,其中 r,h 分别为底半径及高,由题意 $r=20,h=100$,

$$\Delta r = 20.05 - 20 = 0.05,\quad \Delta h = 99 - 100 = -1,$$

$$\Delta V \approx dV = V_r' dr + V_h' dh = 2\pi rh dr + \pi r^2 dh.$$

将数值代入,得

$$\Delta V \approx 2\pi\times 20\times 100\times 0.05 + \pi\times 20^2\times(-1) = -200\pi.$$

故圆柱体受压后体积减小了约 $200\pi\ \mathrm{cm}^3$.

思 考 题

1. 全增量与偏增量有什么关系?
2. 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处偏导数存在,是否在该点函数可微?
3. 全增量与全微分、偏微分与全微分各有什么关系?
4. 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处偏导数存在且连续,则函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 一定可微,反过来成立吗?

思考题解答

1. 在全增量 Δz 中令 $\Delta x=0$，则得偏增量 Δz_y，令 $\Delta y=0$，则得偏增量 Δz_x.

2. 不一定. 如函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 在(0,0)点，由定义可求 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=0$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0$，但在(0,0)点函数 $f(x,y)$ 是不可微的. 因为，$\Delta z-(f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y)=\dfrac{\Delta x\cdot\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$，当 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta x\cdot\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 不趋于零.

3. 全增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$，全微分 $dz=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y$，$\Delta z$ 是 $\Delta x,\Delta y$ 较复杂的函数，dz 是 $\Delta x,\Delta y$ 的线性函数. Δz 与 dz 之差是比 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 高阶的无穷小，当 $|\Delta x|,|\Delta y|$ 很小时，dz 是 Δz 的线性主部，是较好的近似值，即 $\Delta z\approx dz=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y$. 函数关于 x,y 两个自变量的偏微分之和就是全微分.

4. 不一定. 可微只能保证偏导数存在，并不能保证偏导数连续. 例如

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

由微分定义知在(0,0)点 $f(x,y)$ 可微，但 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在(0,0)不连续.

6.5 多元复合函数的求导方法

一元函数微分学中讨论了复合函数求导问题. 对于多元函数有类似的情形.

设函数 $z=f(u,v)$ 通过中间变量 $u=\varphi(x,y)$ 及 $v=\Psi(x,y)$ 而成为 x,y 的复合函数

$$z=f[\varphi(x,y),\Psi(x,y)],$$

如何求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 呢？有下面的定理：

定理 1 设函数 $u=\varphi(x,y),v=\Psi(x,y)$ 在 (x,y) 处有偏导数，$z=f(u,v)$ 在相应的点 (u,v) 有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\Psi(x,y)]$ 在点 (x,y) 处有偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

证明略.

在计算复合函数的偏导数时,应当特别注意各变量间的复合关系(图 6.8).

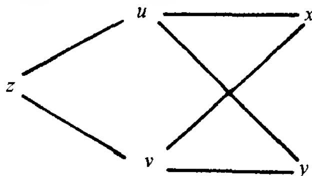


图 6.8

求$\frac{\partial z}{\partial x}$时,虽然 y 不变,但是由于 x 的改变会引起 u 和 v 的改变,相应的 z 的变化就有两部分,一部分来自 u,另一部分来自 v. 同样,求$\frac{\partial z}{\partial y}$时,$z$ 的变化也来自 u 和 v 两部分.

定理 1 可推广到两个以上的自变量或中间变量的情形.

特殊地,只有一个自变量的情形.

设 $z=f(u,v)$,而 $u=\varphi(t)$,$v=\Psi(t)$,则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

这里,复合函数 $z=f[\varphi(t),\Psi(t)]$只是一个自变量 t 的函数. 由于 t 的变化引起 $\varphi(t)$,$\Psi(t)$的变化,因而函数对 t 的导数叫做全导数.

例 1　求 $z=(x^2+y^2)^{xy}$的一阶偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$,$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解　令 $u=x^2+y^2$,$v=xy$,则 $z=u^v$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=vu^{v-1},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=u^v\ln u,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\&=vu^{v-1}\cdot 2x+u^v\ln u\cdot y\\&=(x^2+y^2)^{xy}\left[\frac{2x^2y}{x^2+y^2}+y\ln(x^2+y^2)\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\\&=(x^2+y^2)^{xy}\left[\frac{2xy^2}{x^2+y^2}+x\ln(x^2+y^2)\right].\end{aligned}$$

例 2　设函数 $z=uv+\sin t$,而 $u=\mathrm{e}^t$,$v=\cos t$,求全导数$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

解

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= ve^t - u\sin t + \cos t$$

$$= e^t\cos t - e^t\sin t + \cos t$$

$$= e^t(\cos t - \sin t) + \cos t.$$

例 3 直圆锥的高以每秒 10 cm 的速度减少,底面半径以每秒 2 cm 的速度增加.求高为 100 cm,底面半径为 50 cm 时,圆锥体积的变化率.

解 设在 t 时刻,圆锥底半径为 x cm,高为 y cm,则圆锥的体积为

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y,$$

圆锥体积变化率为 V 对 t 的全导数

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{2}{3}\pi xy\frac{dx}{dt} + \frac{1}{3}\pi x^2\frac{dy}{dt}.$$

而$\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=-10$,$x=50$, $y=100$,所以

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi(2\times 50\times 100\times 2 - 50^2\times 10)$$

$$= -\frac{1}{3}\times 5000\pi$$

$$\approx -5233\ \text{cm}^3.$$

这就是说,此时圆锥体积每秒减少 5.233 L.

思 考 题

1. 求复合函数的偏导数应注意什么?
2. $\frac{dz}{dx}$与$\frac{\partial z}{\partial x}$具有什么意义?

思考题解答

1. 关键是搞清复合关系,必要时画出复合关系图.具体求导时,要分清每步固定了哪个变量,对哪个变量求导.当函数对某个自变量求导时,注意要经过一切有关的中间变量而归结到该自变量求偏导数.

2. $\frac{dz}{dx}$表示 z 对 x 的全导数,即表示中间变量或自变量只有一个时的求导记号,或者,它表示 z 经过若干中间变量而归结为一个自变量 x 的函数,当 x 变化而导致全部中间变量变化所引起的 z 对 x 的全部变化率.$\frac{\partial z}{\partial x}$表示其他变量不变时,$z$

对 x 的变化率，即当中间变量或自变量不止一个时的求导记号.

6.6　二元函数的极值

以前我们应用导数求过一元函数的极大值、极小值，现在讨论怎样用偏导数来求二元函数的极大值、极小值.

定义 1　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有定义，对在该邻域内的任意点 (x,y)，如果均有 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$（或 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$）成立，则称函数在点 (x_0,y_0) 处有**极大值**（或**极小值**）$f(x_0,y_0)$，而称点 (x_0,y_0) 为**极值点**.

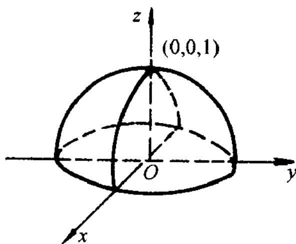


图 6.9

极大值、极小值统称为**极值**.

例如，容易验证，表示上半球面的函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处达到极大值. 点 $(0,0,1)$ 就是球面的顶点（图 6.9）.

怎样寻找多元函数的极值点？同一元函数的极值一样，先给出函数取极值的必要条件.

定理 1　若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有极值（极大值或极小值），且函数在该点的一阶偏导数存在，则它们的一阶偏导数必等于零，即

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\quad f'_y=(x_0,y_0)=0.$$

证明　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有极大值. 根据定义在 (x_0,y_0) 附近的点 (x,y) 满足不等式

$$f(x,y)<f(x_0,y_0),$$

那么固定 $y=y_0$，让 x 在 x_0 附近变化；函数也满足不等式

$$f(x,y_0)<f(x_0,y_0).$$

这就是说一元函数 $f(x,y_0)$ 在点 $x=x_0$ 处取得极大值. 于是根据一元函数的极值定理，即有

$$f'_x(x_0,y_0)=0.$$

同样，当固定 $x=x_0$ 时，一元函数 $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处取得极大值，于是有

$$f'_y=(x_0,y_0)=0.$$

至于函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点取极小值的情形，证明方法完全相同.

对于二元以上的函数取极值的必要条件，有类似的结果.

与一元函数类似，我们把使两个一阶偏导数都等于零的点叫做函数的**驻点**或**稳定点**.

极值点不一定是驻点. 例如函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 点显然取极小值，但 z 在该点偏导数不存在（图 6.10）. 但对于可微函数来说，极值点一定是驻点，而驻点却

不一定是极值点. 例如(0,0)是函数 $z=xy$ 的驻点,但不是极值点. 因此,求函数的极值点就可以从函数的驻点和偏导数不存在的点中去找.

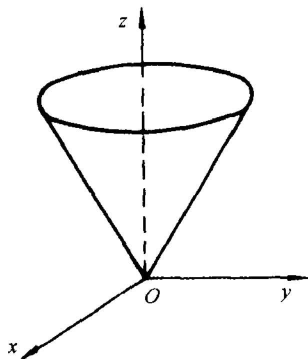


图 6.10

怎样判定一个驻点是否是极值点呢?下面的定理回答了这个问题.

定理 2 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续,且有一阶、二阶连续偏导数,又 $f'_x(x_0,y_0)=0$, $f'_y=(x_0,y_0)=0$. 若令 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$,则

1) 当 $B^2-AC<0$ 时,函数在点 (x_0,y_0) 处有极值. 且当 $A<0$ 时,有极大值 $f(x_0,y_0)$;当 $A>0$ 时,有极小值 $f(x_0,y_0)$.

2) 当 $B^2-AC>0$ 时,函数在点 (x_0,y_0) 处无极值.

3) 当 $B^2-AC=0$ 时,函数在点 (x_0,y_0) 处不能确定是否有极值.

证明略.

求二元函数 $z=f(x,y)$ 的极值方法归纳为:

(a) 求 $z=f(x,y)$ 的一、二阶偏导数;

(b) 解方程组 $\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y=(x,y)=0 \end{cases}$,求得各驻点;

(c) 求出函数 $z=f(x,y)$ 偏导数不存在的点;

(d) 对每一驻点 (x_0,y_0),求出 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$,应用定理 2,由 B^2-AC 的符号判断驻点是否为极值点;对偏导数不存在的点用极值的定义判别;

(e) 求出极值点处的函数值.

例 1 求函数 $z=x^3+y^3-3xy+6$ 的极值.

解 先求驻点,即求一阶偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x,$$

令

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=0$$

得

$$\begin{cases} x^2-y=0, \\ y^2-x=0. \end{cases}$$

解此方程得驻点(0,0),(1,1).

其次判别驻点的性质. 求二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-3,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y.$$

当 $x=0,y=0$ 时

$$B^2-AC=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=9-0>0,$$

故(0,0)不是极值点.

当 $x=1,y=1$ 时,

$$B^2-AC=9-36=-27<0, 而\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6>0,$$

故(1,1)为极小值点,$z\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=5$ 为极小值.

在实际问题中,通常都是寻求函数在某一区域 D 上的最大值或最小值. 这就要求把函数在区域 D 内的所有极值同边界上的最大值和最小值比较,取其中最大的为函数的最大值,最小的为最小值. 然而计算函数在边界上的最大值、最小值很麻烦. 所以,在解决实际问题时,常常根据问题的性质,判定函数在区域 D 上是取最大值或最小值. 这时,如果计算出的驻点只有一个,那么这个点便一定是函数的最大值点或最小值点.

例 2　用铁皮做成一个体积为 2 m^3 的有盖长方体水箱. 问应该选择怎样的长、宽、高才能使材料最省?

解　设水箱的长为 x m,宽为 y m,则其高为$\frac{2}{xy}$,此水箱所用材料的面积为

$$\begin{aligned}S&=2\left(x\cdot y+y\cdot\frac{2}{xy}+x\cdot\frac{2}{xy}\right)\\&=2\left(xy+\frac{2}{x}+\frac{2}{y}\right)\qquad(x>0,y>0).\end{aligned}$$

可见材料面积 S 是 x,y 的二元函数.

$$S'_x=2\left(y-\frac{2}{x^2}\right),\quad S'_y=2\left(x-\frac{2}{y^2}\right),$$

解方程组

$$\begin{cases}S'_x=0,\\S'_y=0,\end{cases}$$

得

$$x=\sqrt[3]{2},\quad y=\sqrt[3]{2}.$$

根据题意,水箱所用材料面积的最小值一定存在,并在区域 $D:x>0,y>0$ 内取得. 又函数在 D 内只有一个驻点($\sqrt[3]{2}$,$\sqrt[3]{2}$),因此,可以断定当 $x=\sqrt[3]{2}$,$y=\sqrt[3]{2}$ 时,S 取得最小值,即当水箱长$\sqrt[3]{2}$ m,宽$\sqrt[3]{2}$ m,高$\sqrt[3]{2}$ m 时,水箱所用的材料最省.

思考题

1. 驻点一定是极值点吗？举例说明.
2. 极值点一定是驻点吗？举例说明.
3. 二元函数在哪些点上可能取极值.

思考题解答

1. 不一定. 如 $z=xy$ 在$(0,0)$点.
2. 不一定. 如 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在$(0,0)$点是极小值点，但偏导数不存在.
3. 驻点和偏导数不存在的点.

6.7 最小二乘法

在实际工作或科学研究中，常常需要根据两个变量的几组实测数值——实验数据，来确定出这两个变量之间的函数关系，找出函数关系的近似表达式. 通常把这样得到的函数关系的近似表达式叫做**经验公式**. 现在我们介绍一种常用的精确度较高的求经验公式的方法，即最小二乘法(least square method).

设经过 n 次独立试验得到变量 x 与 y 的 n 对实测值$(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),\cdots,(x_n,y_n)$，并把这 n 个点标在直角坐标纸上(如图 6.11)，以便从中观察变化规律. 然后与我们掌握的函数的变化规律进行对比，看它接近于什么函数.

从图上如果看到这些点大致在一条直线上，我们就可以用一个一次函数 $y=bx+a$ 来表示变量 y 与 x 之间的关系. 于是问题的关键在于如何恰当地选择待定常数 a 和 b.

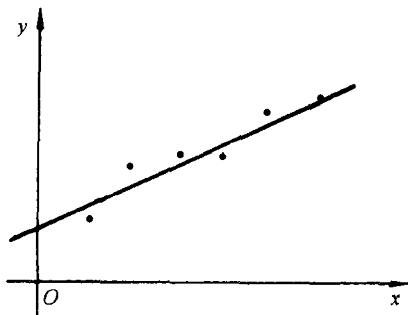


图 6.11

如果点(x_1,y_1)在直线 $y=bx+a$ 上，那么应该有 $y_1=bx_1+a$，即 $y_1-(bx_1+a)=0$，这时函数准确地反映了 x_1 与 y_1 之间的关系. 如果点(x_1,y_1)不在直线 $y=bx+a$ 上，那么 $y_1-(bx_1+a)=\varepsilon_1$，而 $\varepsilon_1\neq 0$，ε_1 表示用函数 $y=bx+a$ 来反映 x_1 与 y_1 关系时所产生的偏差. 我们希望选择恰当的 a 和 b，使这个偏差越小越好.

所谓**最小二乘法**就是：寻找最好的符合实测点的直线 $y=bx+a$，使实测点与直线的偏差的平方和达到最小.

设实测点$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$与直线 $y=bx+a$ 按纵轴方向的偏差为 $\varepsilon_i(i=$

$1,2,\cdots,n$)，于是

$$\varepsilon_i = y_i - (bx_i + a).$$

偏差有正的，也有负的. 为了避免各项偏差求代数和时因正负号而互相抵消，按最小二乘法的意义，只要使偏差的平方和尽量地小就行了，即使和式

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 \quad 或 \quad \sum_{i=1}^{n}[y_i - (bx_i + a)]^2$$

最小.

现在的问题是如何选择参数 a,b，使上式为最小，这就归结为如何求二元函数的极值.

令

$$M(a,b) = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (bx_i + a)]^2,$$

这里 $M(a,b)$ 表示为两个自变量 a 与 b 的函数. 现要求 $M(a,b)$ 的极小值，根据二元函数的极值必要条件，求二元函数的极值必须满足

$$\frac{\partial M(a,b)}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial M(a,b)}{\partial b} = 0.$$

从而有

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - (bx_i + a)] = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n}[y_i - (bx_i + a)]x_i = 0,$$

或写成

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = \sum\limits_{i=1}^{n} bx_i + na, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 b + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i a . \end{cases}$$

得关于未知数 a,b 的联立方程. 解联立方程得 a,b 的值

$$a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n} - b\,\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}. \tag{6.4}$$

所以

$$a = \bar{y} - b\bar{x},$$

其中

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

分别是 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 的平均数，

$$b = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \tag{6.5}$$

将 a,b 之值代入方程

$$y = a + bx,$$

即为所要求的直线方程,此直线称为回归直线,参数 a 和 b 称为 y 对 x 的回归系数.

例 1 某克山病区 10 名健康儿童头发与血中的硒含量(100 ppm)见表如下.求发硒与血硒之间的函数关系式.

发硒 x	74	66	88	69	91	73	66	96	58	73
血硒 y	13	10	13	11	16	9	7	14	5	10

解 设以 x 轴代表发硒含量,y 轴代表血硒含量,把表中数据标在坐标纸上,可以看出这些点基本上呈一直线趋势(见图 6.12),从而设经验公式为

$$y = a + bx.$$

因为

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(74 + 66 + \cdots + 73) = 75.4,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{10}(13 + 10 + \cdots + 10) = 10.8,$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 754, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 58212,$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 8464, \quad \sum_{i=1}^{10} y_i = 108,$$

代入(6.4)、(6.5),得

$$b = 0.2359,$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 10.8 - 0.2359 \times 75.4 = -6.98.$$

故

$$y = 0.24x - 6.98,$$

即 y 对 x 的回归直线是 $y=0.24x-6.98$,亦即发硒与血硒间有线性关系

$$y = 0.24x - 6.98.$$

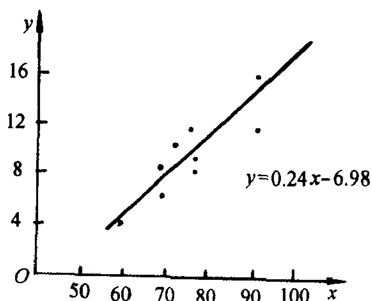


图 6.12

在上例中,按实验数据描出的图形接近于一条直线.在这种情形下,就可认为函数关系是线性函数类型,从而问题可化为求解一个二元一次方程组,计算比较方便.而有一些实际问题,经验公式的类型不是线性函数,如是一元二次函数或指数函数或幂函数等等,对其中的某些类型我们可以设法把它化成线性函数的类型来讨论.举例说明如下:

例 2　以不同温度 T 对某种药品加温 3h 时，测定其对有效成分的破坏率 y. 结果见下表：

T(C)	60	80	100	120
y(%)	5.8	11.5	25.5	50.9

试求 y 与 T 的经验公式.

解　先把表中数据标在普通坐标纸上(见图 6.13)，发现其图形像一条指数曲线. 为判定这一观察结果是否正确，再在半对数纸上作图(图 6.14)，结果有明显的直线趋势. 故选择表达式 $y=Ae^{BT}$ 为数据所遵循的规律，直线化为

$$Y=a+bT,$$

其中 $Y=\lg y, a=\lg A, b=0.4343B$.

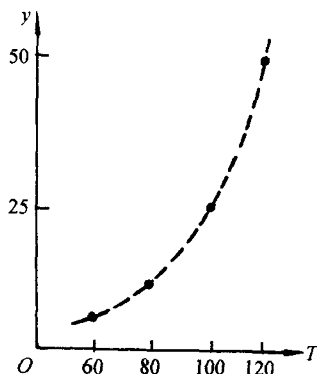


图 6.13

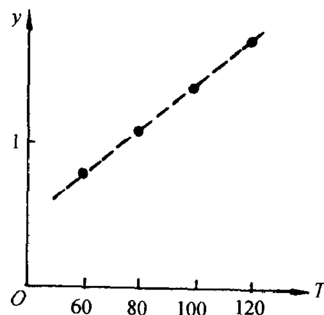


图 6.14

为了确定 A 和 B 的数值，需要对所给 y_i 值取对数得下表：

T_i(℃)	60	80	100	120
$Y=\lg y_i$	0.7634	1.0607	1.4065	1.7067

由此得 $n=4$，$\sum_{i=1}^{4}T_i=360$，$\sum_{i=1}^{4}Y_i=4.9373$，$\sum_{i=1}^{4}T_iY_i=476.114$.

代入公式 6.4、公式 6.5 得

$$b=\frac{476.114-\frac{1}{4}\times 360\times 4.9373}{34400-\frac{1}{4}\times 360^2}=0.01588,$$

$$B=\frac{b}{0.4343}=0.03656,$$

$$a = \frac{1}{4} \times (4.9373 - 0.01588 \times \frac{1}{4} \times 360)$$

$$= -0.19474,$$

$$A = \lg^{-1} a = 0.63865.$$

故破坏率 y 与温度 T 的经验公式为

$$y = 0.63865e^{0.03656T}.$$

思考题

1. 什么是最小二乘法？经验公式中最小二乘法的直观意义何在？

2. 已知变量 y 与 x 的关系为 $y=ax^b(a>0,b>0)$，是否能在一系列实验数据的基础上，将此函数直线化后，用最小二乘法求出其经验公式？

3. 根据实测值与理论值的偏差的平方和为最小这一条件来确定函数的系数是最小二乘法的基本思想. 现已知一组实验数据为$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$. 若假定经验公式是 $y=ax^2+bx+c$，试按此基本思想建立 a,b,c 应满足的三元一次方程.

思考题解答

1. 本节前面. 在一般情况下，一条直线不可能通过全部实测点$(n>3)$. 因此，最小二乘法的直观意义在于找到合适的 a,b，使各实测点与理论直线的纵向距离的总和最小.

2. 对 $y=ax^b$ 两边取对数，得 $\lg y=\lg a+b\lg x$. 令 $X=\lg x, Y=\lg y$，则 $Y=\lg a+bX$，显然 Y 是 X 的线性函数，它在直角坐标系 xOy 上的图形必为一直线，然后再根据实验数据按最小二乘法去求系数 $\lg a,b$.

3. 令 $\delta_i=y_i-(ax_i^2+bx_i+c)$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]^2$$

$$=M(a,b,c).$$

要使 $M(a,b,c)$达到最小，则 a,b,c 应满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M(a,b,c)}{\partial a}=0,\\[2mm]\dfrac{\partial M(a,b,c)}{\partial b}=0,\\[2mm]\dfrac{\partial M(a,b,c)}{\partial c}=0,\end{cases}$$

即应满足下列三元一次方程

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]x_i^2=0,\\ \sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]x_i=0,\\ \sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]=0.\end{cases}$$

6.8 二重积分

6.8.1 二重积分的概念

前面我们讨论过定积分概念，它是一种形式的和的极限，被积函数是确定在 x 轴上一个区间内的单变量函数，即

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

它的几何意义是曲线 $y=f(x)$ 及直线 $x=a,x=b$ 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积.

类似于一元函数，可以对二元函数在平面区域 D 内定义积分，即二重积分.

定义 1　设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，任意分割区域 D 为 n 个不相重叠的小区域，并用记号 $\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示各小区域的面积，d_i 为各个小区域的直径，在每个小区域 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 $P_i(x_i,y_i)$，作乘积 $f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i$ 的和

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i.$$

如果当 n 无限增大，并且所有小区域 $\Delta\sigma_i$ 的直径 d_i 中最大者 λ 趋于零时，不论区域的分法如何，点 $P_i(x_i,y_i)$ 的取法如何，和式的极限存在，则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的**二重积分**(double integral). 记作

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

即

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i,$$

其中 $f(x,y)$ 称为**被积函数**(integrand)，$f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 称为**被积表达式**，$\mathrm{d}\sigma$ 为**面积元素**(element)，x 和 y 称为**积分变量**(variable of integration)，D 称为**积分区域**(domain of integration).

在直角坐标系中，可用平行于坐标轴的直线来分割区域 D，这时面积元素 $\mathrm{d}\sigma$ 可以写成 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，二重积分也就记作

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

可以证明，若函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，那么 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分一定存在.

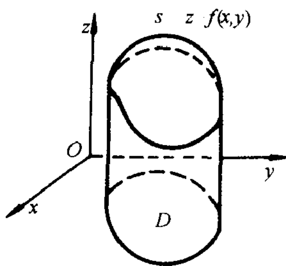


图 6.15

当 $f(x,y)>0$ 时，二重积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示以 xy 平面上的区域 D 为底，以 D 上的二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形为顶，四周由柱面所围成的曲顶柱体的体积（图 6.15）. 这就是**二重积分的几何意义**.

6.8.2 二重积分的性质

二重积分具有与定积分完全类似的性质.

1）常数可提到积分号外.

$$\iint_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

2）有限个函数代数和的积分等于各个函数积分的代数和.

$$\iint_D [f(x,y) \pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \pm \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

3）当区域 D 由有限个不相重叠的部分组成时，D 上的积分等于部分区域上积分的和.

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

该性质说明二重积分对于区域具有可加性.

4）如果在 D 上，$f(x,y)\equiv 1$，σ 为区域 D 的面积，则

$$\sigma = \iint_D 1\mathrm{d}\sigma = \iint_D \mathrm{d}\sigma.$$

此性质的几何意义很明显，因为高为 1 的平顶柱体的体积在数值上就等于柱体的底面积.

6.8.3 二重积分的计算

上面已给出二重积分的定义，但是如何计算二重积分的值呢？如果直接用二重

积分的定义去计算是困难的. 根据二重积分可以解释为曲顶柱体的体积这个观点，容易导出二重积分的计算法则，其关键在于把二重积分化为连续计算两次定积分，即二次积分.

现分两种情形陈述如下：

(1) 矩形区域

设函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $D:a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d$ 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分可以表示为二次积分

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y.$$

即先把 $f(x,y)$ 中的 x 看作常数，y 看作变量，在 y 的变化区间 $[c,d]$ 上对 y 积分，这样积分的结果显然是 x 的函数，然后将这函数在 x 的变化区间 $[a,b]$ 上对 x 积分.

同样，有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$

即也可化成先对 x 积分，后对 y 积分的二次积分.

(2) 任意区域

设 D 是由两条直线 $x=a,x=b$ 及两条曲线 $y_1=\varphi_1(x),y_2=\varphi_2(x)$ $[\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x),a\leqslant x\leqslant b]$ 所围成(图 6.16)，则 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分可以表示为二次积分

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

同样，若 D 由两条直线 $y=c,y=d$ 及两条曲线 $x_1=\Psi_1(y),x_2=\Psi_2(y)$ $[\Psi_1(y)\leqslant\Psi_2(y),c\leqslant y\leqslant d]$ 所围成(图 6.17)，则 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分可表示为二次积分

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

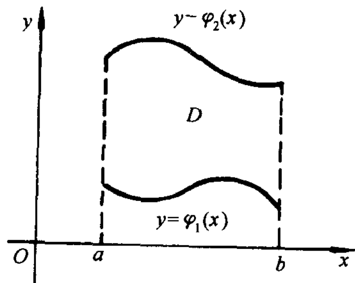


图 6.16

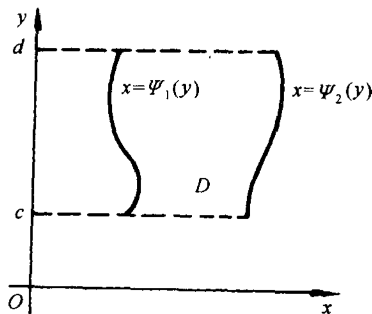


图 6.17

注意:第二次积分的上、下限总是常数.

若积分区域 D 是其他形状,则可将它分成若干部分,而每个部分为上述两种积分区域类型之一,然后再按二重积分的性质(3)计算.

例 1 求函数 $z=1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}$ 在矩形域 $D:-1\leqslant x\leqslant 1,-2\leqslant y\leqslant 2$ 上的二重积分.

解 先对 x 后对 y 作两次积分,

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{D}\left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&=\int_{-2}^{2}\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)\mathrm{d}x \\
&=\int_{-2}^{2}\left[x-\frac{x^{2}}{6}-\frac{xy}{4}\right]_{-1}^{1}\mathrm{d}y \\
&=\int_{-2}^{2}\left(2-\frac{y}{2}\right)\mathrm{d}y \\
&=\left[2y-\frac{y^{2}}{4}\right]_{-2}^{2} \\
&=8.
\end{aligned}$$

若先对 y 后对 x 积分,也得同样的结果.

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{D}\left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)\mathrm{d}y \\
&=\int_{-1}^{1}\left[y-\frac{xy}{3}-\frac{y^{2}}{8}\right]_{-2}^{2}\mathrm{d}x \\
&=\int_{-1}^{1}\left(4-\frac{3}{4}x\right)\mathrm{d}x \\
&=4\left[x-\frac{x^{2}}{6}\right]_{-1}^{1} \\
&=8.
\end{aligned}$$

从几何上来说,这个二重积分是以矩形 D 为底,顶为平面 $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}+z=1$ 所截的角棱柱体的体积(图 6.18).

例 2 计算 $\iint\limits_{D}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由直线 $y=1,x=2$ 及 $y=x$ 所围成的区域.

解法一 先对 y 后对 x 积分

首先画出区域 D(图 6.19)，于是

$$\begin{aligned}
&\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_1^2 \mathrm{d}x \int_1^x xy\mathrm{d}y \\
&= \int_1^2 \left[x \cdot \frac{1}{2}y^2\right]_1^x \mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 \\
&= 1\frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

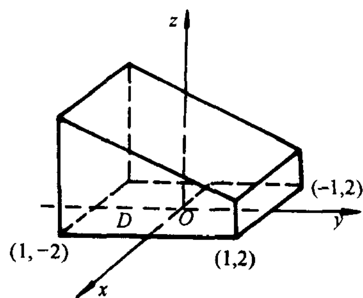


图 6.18

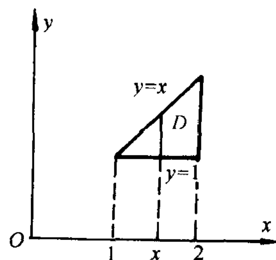


图 6.19

解法二　先对 x 后对 y 积分

区域 D 如图 6.20，于是

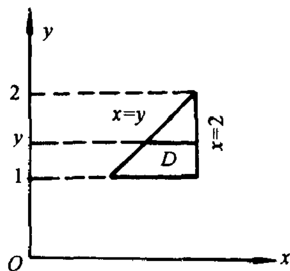


图 6.20

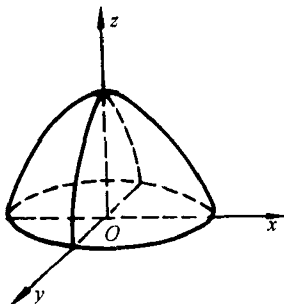


图 6.21

$$\begin{aligned}
&\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_1^2 \mathrm{d}y \int_y^2 xy\mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 \left[y \cdot \frac{x^2}{2} \right]_y^2 \mathrm{d}y \\
&= \int_1^2 (2y - \frac{y^3}{2})\mathrm{d}y \\
&= \left[y^2 - \frac{y^4}{8} \right]_1^2 \\
&= 1\frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

例 3 求椭圆抛物面 $z=1-4x^2-y^2$ 与平面 xOy 围成的体积(图 6.21).

解 由于所给的抛物面对称于 xOz 和 yOz 两坐标面,且与 xOy 平面的交线为椭圆 $4x^2+y^2=1$,所以用不等式 $4x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 所规定的区域上的二重积分便是所求体积的 $\frac{1}{4}$. 从而

$$V = 4\iint_D (1 - 4x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 为 $4x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$. 解得

$$\begin{aligned}
V &= 4\iint_D (1 - 4x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 4\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-4x^2}} (1 - 4x^2 - y^2)\mathrm{d}y \\
&= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 4x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

设 $2x=\sin t$,得

$$\begin{aligned}
V &= \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\mathrm{d}t \\
&= \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16}\pi \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

例 4 计算 $\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 由 $y=x^2, y=\frac{1}{2}(3-x)$ 与 x 轴正向围成(图

6.22).

解　因 D 是由二条直线与一条曲线围成，分别先求出它们的交点 $(1,1)$，$(0,3)$，$(0,0)$.

过 $(1,1)$ 点作平行于 y 轴的直线，则 D 被一分为二，从而 $D=D_1+D_2$. 则

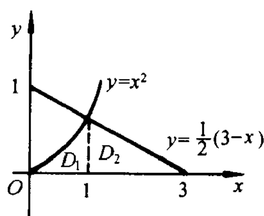


图 6.22

$$
\begin{aligned}
&\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} xy\mathrm{d}y + \int_1^3 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} xy\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}x^5\mathrm{d}x + \int_1^3 \frac{1}{8}(9x - 6x^2 + x^3)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{7}{12}.
\end{aligned}
$$

6.8.4　二重积分的应用

在定积分中学过的微元法也可推广到二重积分中. 如果某个量 U 对于区域 D 具有可加性(即当区域 D 分成许多小区域时，量 U 相应地被分成许多部分量，而 U 等于这些部分量之和)，并且在区域 D 内任取一个直径很小的区域 $\mathrm{d}\sigma$ 时，相应的部分量可以近似地表示成 $f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的形式，点 (x,y) 在 $\mathrm{d}\sigma$ 内，那么 $f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 称为量 U 的微元，记作 $\mathrm{d}U$，以它做被积表达式，在区域 D 上的二重积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 就是所求量 U，即

$$U = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

(1) 质量

如有一块薄板，若其面密度是均匀的，那么它的质量为

$$M = \mu S,$$

其中 μ 是常数，M 为质量，S 为面积.

如果此平面薄板的面密度是不均匀的，μ 不是常数.它在 xOy 面上占有区域 D，在点 (x,y) 处的密度为 $\mu(x,y)$，假定 $\mu(x,y)$ 在 D 上连续.现求该薄板的质量.

将 D 任意分成 n 个小片，$d\sigma$ 是其中任一小片，同时也表示该小片的面积，(x,y) 是 $d\sigma$ 中的一个点，则 $d\sigma$ 部分的质量微元为

$$dM = \mu(x,y)d\sigma.$$

从而在整个区域 D 上，薄板的质量

$$M = \iint_D dM = \iint_D \mu(x,y)d\sigma = \iint_D \mu(x,y)dxdy$$

即是密度函数在区域 D 上的二重积分.

(2) 静力矩

力学上规定，质点对于一轴的静力矩等于这点的质量与它到轴的距离的乘积 Md.质点系对于一轴的静力矩等于该系中各点对同一轴的静力矩之和.现求区域 D 上一平板对 Ox 轴的静力矩 M_x 及对 Oy 轴的静力矩 M_y.

在前面分析的基础上，将质量微元 dM 看成集中在点 (x,y)，于是得小片 $d\sigma$ 对 y 轴、x 轴的静力矩微元分别为

$$dM_y = x\mu(x,y)d\sigma,\ dM_x = y\mu(x,y)d\sigma.$$

以它们为被积表达式在区域 D 上积分，得

$$M_y = \iint_D x\mu(x,y)d\sigma = \iint_D x\mu(x,y)dxdy,$$

$$M_x = \iint_D y\mu(x,y)d\sigma = \iint_D y\mu(x,y)dxdy.$$

(3) 重心

若 xOy 平面有 n 个质量分别为 m_i，坐标为 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 的质点，则该质点系的重心坐标为

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},\qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

设有一平面薄板，在 xOy 面上占有区域 D，面密度为 $\mu=\mu(x,y)$，$(\overline{x},\overline{y})$是该薄板的重心坐标，$M$ 是其质量，M_x，M_y 分别是该薄板对 Ox 轴、Oy 轴的静力矩，根据重心定义，有

$$\overline{x}M = M_y,\qquad \overline{y}M = M_x.$$

由上面质量和静力矩公式，便得

$$\overline{x} = \frac{\iint\limits_D x\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y},$$

$$\overline{y} = \frac{\iint\limits_D y\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}.$$

若薄板是均匀的，μ 是常数，公式则可写成

$$\overline{x} = \frac{\iint\limits_D x\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma} = \frac{\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y},\qquad \overline{y} = \frac{\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma} = \frac{\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y}.$$

(4) 转动惯量

由力学知道，质量为 m 的位于点(x,y)处的质点，对于 x 轴、y 轴以及通过原点 O 而垂直于 xOy 平面的轴的转动惯量分别为

$$I_x = y^2m,\ I_y = x^2m,\ I_0 = (x^2+y^2)m.$$

设有一薄片占有 xOy 面上的区域 D，在点(x,y)处的面密度为 $\mu(x,y)$. 假定 $\mu(x,y)$在 D 上连续，则平面薄片对 x 轴、y 轴及通过原点 O 而垂直于 xOy 平面的轴的转动惯量分别为

$$I_x = \iint\limits_D y^2\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I_y = \iint\limits_D x^2\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I_O = \iint\limits_D (x^2+y^2)\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例 5　设平面薄板的面密度为 $\mu(x,y)=x^2+y^2$，求直线 $x+y=1$，$x=0$，$y=0$ 围成的平面薄板的质量.

解　作薄板在平面占有的区域 D 的图形(图 6.23).

积分区域 D 可表示为

$$D:\begin{cases}0\leqslant y\leqslant 1-x,\\ 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

因而平面薄板的质量为

$$\begin{aligned}M&=\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y\\ &=\int_0^1\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x}\mathrm{d}x\\ &=\int_0^1\left[x^2-x^3-\frac{(1-x)^3}{3}\right]\mathrm{d}x\\ &=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{(1-x)^4}{12}\right]_0^1\\ &=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

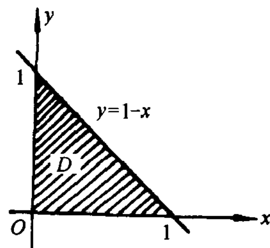


图 6.23

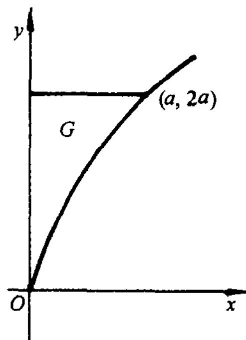


图 6.24

例 6　求由抛物线 $y^2=4ax$，直线 $y=2a$ 及 Oy 轴所围成图形(图 6.24)的重心 $G(\bar{x},\bar{y})$ 和对原点的转动惯量 I_0，假定质量是均匀的.

解　应用重心公式，得

$$\bar{x}=\frac{\int_0^{2a}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{y^2}{4a}}x\mathrm{d}x}{\int_0^{2a}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{y^2}{4a}}\mathrm{d}x}=\frac{\int_0^{2a}\frac{1}{32a^2}y^4\mathrm{d}y}{\int_0^{2a}\frac{1}{4a}y^2\mathrm{d}y}=\frac{\frac{a^3}{5}}{\frac{2a^2}{3}}=\frac{3}{10}a,$$

$$\overline{y}=\frac{\int_0^{2a}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{y^2}{4a}}y\mathrm{d}x}{\int_0^{2a}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{y^2}{4a}}\mathrm{d}x}=\frac{\int_0^{2a}\frac{1}{4a}y^3\mathrm{d}y}{\frac{2a^2}{3}}=\frac{3}{2a^2}\cdot a^3=\frac{3}{2}a.$$

所以重心坐标为 $G\left(\frac{3}{10}a,\frac{3}{2}a\right)$.

应用转动惯量公式，得

$$\begin{aligned}I_0&=\int_0^{2a}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{y^2}{4a}}(x^2+y^2)\mu\mathrm{d}x\\&=\mu\cdot\int_0^{2a}\left(\frac{y^6}{192a^3}+\frac{y^4}{4a}\right)\mathrm{d}y\\&=\frac{178}{105}a^4\mu.\end{aligned}$$

思考题

1. 试比较二重积分与定积分定义的异同.
2. 二重积分化成二次积分后，积分上限能否小于积分下限？
3. 在计算二重积分时，应如何选择积分次序？
4. 在什么条件下，二重积分可化为两个单变量积分的乘积？

思考题解答

1. 一元函数的定积分是在数轴上一区间的积分，而二重积分是在平面一区域上的积分. 从定义上看，同是分割、近似代替、求和、取极限，并无本质差异.

2. 不能. 见本节积分限的确定叙述.

3. 应注意区域尽量少分块，这样积分计算简单且容易积出.

4. 区域为矩形，被积函数为

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y).$$

习　题　6

1. 求点 $P(2,-3,1)$ 到坐标原点和各坐标轴的距离.

2. 在 z 轴上求与点 $A(-4,1,7)$ 和点 $B(3,5,-2)$ 距离相等的点 C.

3. 指出下列方程表示怎样的曲面，并画出草图：

(1) $(x-a)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$；　(2) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$；

(3) $x^2+y^2+z^2=16$；　(4) $z=2-x^2$；

(5) $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$；　(6) $y^2-z=0$.

4. 确定下列函数的定义域：

(1) $z=x+y$；　(2) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$；

(3) $z-\ln(x-y)$；　(4) $z=\frac{1}{\sqrt{x-y}}$.

5. 求下列各函数在给定点的函数值：

(1) $z=\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在点 $(0,1)$，$(2,4)$；

(2) $f(x,y)=2\sin(x+y)+\frac{\sqrt{y}}{x}-1$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$；

(3) $f(x,y)=e^{x+y}-xy+1$ 在点 $(0,0)$，$(0,1)$，$(\ln a,0)$.

6. 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x+y}{x-y}$ 不存在.

7. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

8. 求下列函数的间断点：

(1) $z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　(2) $z=\frac{1}{x-y}$.

9. 如果函数 $z=x^2+xy-3x+2y+5$，当点 $P(x,y)$ 由 $(1,1)$ 变到 $(2,-1)$ 时，它的偏增量与全增量各为多少？全增量是否为偏增量之和？

10. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=\ln\sin(x-2y)$；　(2) $z=e^{xy}$；

(3) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$；　(4) $z=\arctan\frac{y}{x}$；

(5) $\mu=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz$；　(6) $z=x^2\ln(x^2+y^2)$；

(7) $f(x,y)=xe^y$ 在 $(2,0)$ 点；　(8) $f(x,y)=x^2y^2-2y$ 在 $(2,3)$ 点.

11. 求下列函数的二阶偏导数：

(1) $z=e^{xy}+ye^x+xe^y$；　(2) $z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$；

(3) $\mu=\dfrac{xy}{z^2}$；　　　　(4) $z=x\sin(x+y)+y\cos(x+y)$.

12. 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$$

在除原点(0,0)以外各点处求 f_x,f_y，并从偏导数定义出发，说明在原点(0,0)处有偏导数 f'_x,f'_y,f''_{xy}和 f''_{yx}，但 $f''_{yx}(0,0)\neq f''_{xy}(0,0)$.

13. 验证函数 $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$满足方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}.$$

14. 求函数 $z=\dfrac{y}{x}$，当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

15. 求下列函数的全微分：

(1) $z=x^2+3xy-2y^2$；　　　　(2) $z=e^{x-2y}$；

(3) $z=x^2\ln(xy)$；　　　　(4) $u=\sin(x^2+y^2+z^2)$；

(5) $z=\left(\dfrac{x}{y}\right)^2$；　　　　(6) $z=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$.

16. 求下列复合函数的偏导数或全导数：

(1) 设 $z=\arctan\dfrac{u}{v}$，而 $u=x+y,v=x-y$；

(2) 设 $z=e^{uv}$，而 $u=x+y,v=xy$；

(3) 设 $z=\dfrac{y}{x}$，而 $x=e^t,y=1-e^{2t}$.

17. 设 $z=f(u)+g(v)$，而 $u=x-y,v=x+y$，验证

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

18. 求下列函数的极值：

(1) $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$；

(2) $f(x,y)=e^{2x}(x^2+y^2+2y)$.

19. 将直径为 200 mm，长为 600 mm 的圆钢放在加热炉里加热，直径增大的速度为 0.08 mm/min，长度增大的速度为 0.25 mm/min，问圆钢体积增大的速度是多少？

20. 有一下部为圆柱形，上部为圆锥形的帐篷，它的容积 V 为一常数 k，今要使所用的布量少，试证帐篷尺寸间应有关系式 $R=\sqrt{5}H,h=2H$（R,H 各为圆柱的底面半径及高，h 为圆锥形的高）.

21. 经研究，肺泡气体内氧分压与外界气压有着密切的关系，据测量数据如下表：

外界气压(10mmHg) x	5	6	8	11	13
肺泡气体内氧分压(mmHg) y	5	7	10	16	22

试用最小二乘法求出 y 与 x 的经验公式.

22. 在研究单分子化学反应速度时，得到下列数据：

反应时间 t	3	6	9	12	15	18	21	24
t 时刻反应物的量 y	57.6	41.9	31.0	22.7	16.6	12.2	7.9	6.5
$Y=\lg y$	1.760	1.622	1.491	1.356	1.220	1.086	0.898	0.813

t 表示从实验开始算起的时间，y 为在时刻 t 反应混合物的量. 由化学反应速度的理论知道，y 与 t 应是指数函数关系，试用最小二乘法求出经验公式 $y=f(t)$.

23. 对二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 按下列指定的积分区域 D 确定二次积分的积分限：

(1) D:(0,0)，(1,0)，(1,1)为顶点的三角形；

(2) D:(0,0)，(1,0)，(1,2)，(0,1)为顶点的梯形；

(3) D:圆 $x^2+y^2\leqslant 1$.

24. 画出积分区域，并计算二重积分：

(1) $\iint\limits_D(2x^2-xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$， $D:0\leqslant x\leqslant 1,2\leqslant y\leqslant 3$；

(2) $\iint\limits_D(x^2+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$， $D:y=x^2$，$y^2=x$ 所围成的区域；

(3) $\iint\limits_D\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$， $D:y=x$，$y=2x,x=4,x=2$ 所围成的区域；

(4) $\iint\limits_D\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$， $D:0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4},0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$；

(5) $\iint\limits_D\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$， $D:x=0,y=0,x=1,y=1$ 所围成的区域；

(6) $\iint\limits_D(2x-3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$， $D:x^2+y^2\leqslant 9$.

25. 求曲线 $y=x^2$ 及直线 $y=4$ 所围成的平面薄板的质量，设面密度为常数 μ.

26. 求 $\frac{1}{4}$ 圆 $x^2+y^2\leqslant a^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 的重心(设面密度为均匀的).

27. 求均匀分布在 $y=x^2$ 与 $y=1$ 所围成的平板上的质量关于原点的转动惯量.

习题 6 答案

1. 到原点、x、y、z 轴的距离分别是$\sqrt{14}$,2,3,1.

2. $C\left(0,0,\frac{14}{9}\right)$.

3. (1) 圆柱面；(2) 双曲柱面；(3) 球面；(4) 抛物柱面；(5) 平面；(6) 抛物柱面．

4. (1) $x\in\mathbf{R}$，$y\in\mathbf{R}$；

   (2) $-1\leqslant x\leqslant 1$，$-1\leqslant y\leqslant 1$；

   (3) $x+y<0$；

   (4) $x-y>0$.

5. (1) 1，$\frac{3}{\sqrt{5}}$；(2) 2，$e+1$，$a+1$；(3) 1.

6. 答案

7. 1.

8. (1) (0,0)；(2) 直线 $y=x$.

9. $\Delta z_x=1$，$\Delta z_y=-6$，$\Delta z\neq\Delta z_x+\Delta z_y$，　$\Delta z=-7$.

10. (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\cot(x-2y)$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=-2\cot(x-2y)$；

    (2) $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}$；

    (3) $\frac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy)-2y\cos(xy)\sin(xy)$，

    $\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(xy)-2x\cos(xy)\sin(xy)$；

    (4) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$；

    (5) $\frac{\partial u}{\partial x}=2(x+y)$，　$\frac{\partial u}{\partial y}=2(x+y+z)$，　$\frac{\partial u}{\partial z}=2(y+z)$；

    (6) $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\ln(x^2+y^2)+\frac{2x^3}{x^2+y^2}$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x^2y}{x^2+y^2}$；

    (7) $f'_x(2,0)=1$，$f'_y(2,0)=2$；

    (8) $f'_x(2,3)=36$，　$f'_y(2,3)=22$.

11. (1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2e^{xy}+ye^x$，　$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2e^{xy}+xe^y$，

    $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=e^{xy}+xye^{xy}+e^x+e^y=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

(2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$;

(3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{xy}{z^4}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$;

(4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(2-y)\cos(x+y)-x\sin(x+y)$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-(2-x)\sin(x+y)+y\cos(x+y)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-(1+x)\sin(x+y)+(1-y)\cos(x+y)$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

14. $\Delta z=-0.119$, $dz=-0.125$.

15. (1) $dz=(2x+3y)dx+(3x-4y)dy$;

(2) $dz=e^{x-2y}dx-2e^{x-2y}dy$;

(3) $dz=(2x\ln(xy)+x)dx+\frac{x^2}{y}dy$;

(4) $du=2\cos(x^2+y^2+z^2)(xdx+ydy+zdz)$;

(5) $dz=2\frac{x}{y^2}dx-\frac{2x^2}{y^3}dy$;

(6) $dz=\frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}dx+\frac{1+x^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}dy$.

16. (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$;

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=xye^{xy(x+y)}+y(x+y)e^{xy(x+y)}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=xye^{xy(x+y)}+x(x+y)e^{xy(x+y)}$

(3) $\frac{dz}{dt}=-e^t-e^{-t}$.

18. (1) 极大值 $f(2,-2)=8$;

(2) 极小值 $f\left(\frac{1}{2},-1\right)=-\frac{e}{2}$.

19. $7300\pi\approx 2.29$ L/min.

21. $y=2.058x-5.6988$.

22. $y=79.8e^{-0.106t}$.

23. (1) $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)\,dy$;

(2) $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x+1}f(x,y)\,\mathrm{d}y$;

(3) $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

24. (1) $-\frac{7}{12}$;

(2) $\frac{33}{140}$;

(3) 9;

(4) $\sqrt{2}-1$;

(5) $(\mathrm{e}-1)^2$;

(6) -9.

25. $M=\iint\limits_D u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2u\int_0^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^4\mathrm{d}y=\frac{32}{3}u$.

26. $\bar{x}=\frac{4}{3\pi}a$, $\bar{y}=\frac{4}{3\pi}a$.

27. $\frac{88}{70}\mu$.

第 7 章

微分方程

微分方程(differential equation)是 17～18 世纪为解决一系列物理问题所产生的一个数学分支,它为寻求变量之间的函数关系找到了新的方法. 1846 年,一名法国化学实验员 Leverrier 在海王星还未实际观测到之前,就根据微分方程预测这颗行星的存在及其在太空中的位置. 学习了本章的内容,读者对这一点将会有更具体、更深刻的体会.

在许多实际问题中涉及到变化率的问题,如卫星运行轨道、飞行稳定性、化学反应过程、药物吸收和排泄过程、疾病传播方式、人口增长理论、肿瘤生长规律等,都可借助微分方程这个工具予以解决. 近年来,在天气预报系统中,人们开始借助于巨型计算机,利用微分方程知识进行气象预测. 人是一个小宇宙,如研究自然规律那样,在人体科学的研究中,可以根据各种动态变化的特征,采用动力系统的方法进行研究;如药物动力学、微生物动力学等,充分显示了微分方程这门学科的应用前景.

从理论上讲,微分方程的研究大致有 3 个方面:

1) 根据实际背景确立方程;

2) 讨论某些类型方程的解法;

3) 不具体解出方程而根据方程本身的特点讨论方程解的存在性、唯一性、连续性、稳定性、周期性等.

本章着重讨论前两个问题,并将运用所学的知识介绍一些医学中的微分方程模型实例.

7.1 微分方程的一般概念

微分方程总体上讲分为偏微分方程和常微分方程两大类. 方程中,如果所求函数是多元函数,其导数就是偏导数,此时称方程为**偏微分方程**. 例如:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

其中的未知函数为 $z=z(x,y)$.

如果方程中所求的函数为一元函数，则其导数为全导数，此时称方程为**常微分方程**. 本章讨论的只限于常微分方程.

为介绍微分方程的一般概念，先引入以下例题：

例 1　一物体在重力作用下自由下落(不计空气阻力)，下落的初始位置为 $s_0=0$，初始速度 $v_0=0$，求物体下落距离 s 与时间 t 的关系 $s(t)$.

解　设物体下落距离与时间关系为 $s=s(t)$，且已知重力加速度为 g，则据题意有

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=g, \tag{7.1}$$

$$s|_{t=0}=s_0=0, \tag{7.2}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=v_0=0. \tag{7.3}$$

分析函数 $s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$　(C_1、C_2 为任意常数)，因为

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=gt+C_1,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=g,$$

故该函数满足方程(7.1). 当 $C_1=C_2=0$ 时，

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

它满足方程(7.1)及条件(7.2)，(7.3).

下面给出有关的几个概念：

7.1.1　微分方程

含有自变量、未知函数及其导数(或微分)的方程称为微分方程，如方程(7.1).

7.1.2　微分方程的阶

微分方程中所含未知函数的导数或微分的最高阶数称为**微分方程的阶**(order). 如方程(7.1)为二阶方程. 又如方程 $(y')^3+2y^2=0$ 为一阶微分方程.

方程 $2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x$ 为二阶微分方程.

方程 $xy'''+2yy''-y=e^x$ 为三阶微分方程.

7.1.3　微分方程的解

满足微分方程的函数称为**微分方程的解**(solution). 即:该函数及其导数代入方程两边使之成为恒等式.

如函数 $s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 和 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 都为方程(7.1)的解.

例 2　验证 $y=Ce^{-3x}+e^{-2x}$ 是方程 $\frac{dy}{dx}+3y=e^{-2x}$ 的解.

证　$y'=-3Ce^{-3x}-2e^{-2x}$,

$y'+3y=-3Ce^{-3x}-2e^{-2x}+3(Ce^{-3x}+e^{-2x})=e^{-2x}$,

左 = 右.

故 $y=Ce^{-3x}+e^{-2x}$ 是方程的解.

7.1.4　微分方程的通解

若方程的解中含有独立的任意常数的个数与方程的阶数相同,则称此解为**微分方程的通解**(general solutions).

例 1 中,$s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 中含有两个独立的任意常数,故为方程的通解. $s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t$ 亦是方程的解,虽然它也包含无穷多个解,但由于其中只有一个任意常数,故不是方程的通解.

7.1.5　微分方程的初始条件(initial conditions)

方程的解所需满足的附加条件,称为初始条件. 例 1 中(7.2),(7.3)式为方程(7.1)的初始条件. 一般来说,一阶方程只有一个初始条件,n 阶微分方程有 n 个初始条件.

7.1.6　微分方程的特解(particular solutions)

方程满足初始条件的解称为特解. 在通解中,利用方程的初始条件求出其中的任意常数应取的值,这样得到的解即为特解. 例 1 中的 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 即为方程满足初始条件(7.2),(7.3) 的特解.

例 3　某方程的通解为 $y=x^2+C$,求满足该方程初始条件 $y(0)=1$ 的特解.

解　将 $x=0,y=1$ 代入通解中,得 $1=0+C$,由此得 $C=1$,故所求特解为 $y=x^2+1$.

习惯上在没有注明的情况下 C 都表示任意常数.

例 4　某方程的通解为 $y=C_1\ln x+C_2$,求满足初始条件 $\begin{cases} y(1)=1 \\ y'(1)=0 \end{cases}$ 的特解.

解　将 $x=1,y=1$ 代入得 $C_2=1$.

由于 $y'=\dfrac{C_1}{x}$，将 $x=1, y'=0$，代入得 $C_1=0$，故方程的特解为

$$y=1.$$

微分方程的解中所含的任意常数是在积分过程得到的，有些书上也称**积分常数**(integral constant)．一阶微分方程的通解表示在平面上的一族曲线，称为**积分曲线**(integral curve)．满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的特解的积分曲线是过点 (x_0, y_0) 的那一条.

例 5　微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ 的解为 $y^2+x^2=C$，试说出该方程的积分曲线是怎样的图形，满足初始条件 $y(1)=1$ 的特解又是怎样一条积分曲线?

解　方程的解为 $y^2+x^2=C$，故积分曲线是以原点为圆心的一族同心圆，满足初始条件 $y(1)=1$ 的积分曲线即是 $C=2$ 时的那个过点 $(1,1)$ 的圆. 如图(7.1).

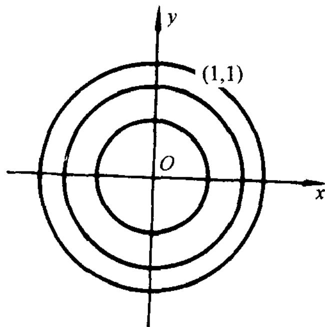


图 7.1

思考题

1. 曲线 $2x+y-1=e^{2y-x}$ 是否为方程 $(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy=0$ 的解?

2. 方程 $(x^2+1)y''-2xy'+2y=0$，试问 $y=C(x^2-1)$ 是否为此方程的解? 是否为此方程的通解? 你由此得到什么启发?

3. 通解是否包含了所有的解?

思考题解答

1. 将 $2x+y-1=e^{2y-x}$ 两边对 x 求导，得

$$2+\frac{dy}{dx}=e^{2y-x}\left(2\cdot\frac{dy}{dx}-1\right).$$

由已知

$$e^{2y-x}=2x+y-1,$$

即有

$$2+\frac{dy}{dx}=(2x+y-1)\left(2\frac{dy}{dx}-1\right),$$

整理得

$$(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy=0,$$

故曲线

$$2x+y-1=e^{2y-x}$$

为所给方程的解.

2. 将 y, y' 代入方程可知 $y=C(x^2+1)$ 为所给方程的解.

由于解中只含一个任意常数而方程为二阶微分方程,故此解不是该方程的通解.

此结果说明有些方程的解虽然包含无穷多个解,但由于任意常数的个数不等于方程的阶数,故不是通解,同时也说明方程的解可以既非通解,亦非特解.

3. 通解不一定包含方程所有的解. 例如方程 $y'=y^2$,其通解为

$$y=-\frac{1}{x+C},$$

显然 $y\equiv 0$ 亦是方程的解,但它不在通解之中.

7.2 几种常见的一阶微分方程

微分方程的求解,并无普遍适用的方法. 通常是对特殊类型的方程讨论其求解方法,其中有些解能用初等函数表示出来,有些则不能用初等函数表示而只能以无穷级数或者其他非初等函数形式表示,也有些用近似值表示. 从本节起到 7.5 节,将介绍几种基本类型的微分方程的求解方法,虽然这些类型是有限的,但它们是许多常见的实际问题中出现的类型.

一阶微分方程的一般形式为

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0, \\ y(x_0)=y_0. \end{cases}$$

本节介绍两类一阶微分方程的解法.

7.2.1 可分离变量型

型如

$$\frac{dy}{dx}=h(x)g(y) \quad (g(y)\neq 0) \tag{7.4}$$

的方程称为**可分离变量型方程**.

显然,可将它变为

$$\frac{dy}{g(y)}=h(x)dx.$$

将等式两端直接积分,得方程(7.4)的通解

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int h(x)dx+C.$$

例 6 求方程 $(1+y^2)dx+xydy=0$ 的通解.

解 将方程变形为

$$\frac{y}{1+y^2}dy=-\frac{1}{x}dx,$$

两边积分,得

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=-\ln|x|+C_1.$$

为简化解的形式,将 C_1 改写为$\frac{1}{2}\ln C(C>0)$,则有

$$\ln(1+y^2)+2\ln|x|=\ln C,$$

故

$$x^2(1+y^2)=C$$

为该方程的通解.

例 7　求$\begin{cases}x(y^2+1)\mathrm{d}x+y(1+x^2)\mathrm{d}y=0\\ y(0)=1\end{cases}$的通解和特解.

解　将方程变形为

$$\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y$$

两边积分,得

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=C_1,$$

即

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\frac{1}{2}\ln C\ (C>0),$$

则方程的通解为

$$(x^2+1)(y^2+1)=C.$$

将初始条件 $x=0,y=1$ 代入通解中,得 $C=2$,故方程的特解为

$$(x^2+1)(y^2+1)=2.$$

例 8　如图 7.2 所示的电路,可建立微分方程 $RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}+u_c=E$,其中 R 是电阻,C 是电容器的电容,E 是电源电势,u_c 是电容器上的电压. 如果已知 $u_c(0)=0$,求 u_c 随时间 t 的变化规律.

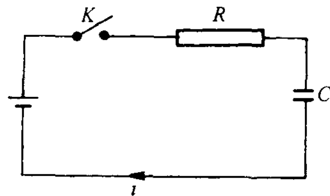


图 7.2

解　将方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}u_c}{E-u_c}=\frac{1}{RC}\mathrm{d}t,\text{即}-\frac{\mathrm{d}u_c}{E-u_c}=-\frac{1}{RC}\mathrm{d}t,$$

两边积分得

$$\ln|E-u_c|=-\frac{t}{RC}+A_1(A_1\text{ 为任意常数}),$$

即

$$\ln|E-u_c|=\ln e^{-\frac{t}{RC}}+\ln A(A>0),$$

$$E-u_c=Ae^{-\frac{t}{RC}}.$$

代入初始条件 $u_c(0)=0$ 得 $A=E$，即

$$E-u_c=E\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}},$$

故 u_c 随时间的变化规律为

$$u_c(t)=E(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}).$$

例 9 求通过点(1,1)的曲线方程，使其在区间[1,x]上对应的曲边梯形面积等于该曲线上点 $M(x,y)$的两个坐标之积的 2 倍($x>0,y>0$).

解 设曲线的方程为 $y=y(x)$，在[1,x]上对应的曲边梯形面积为 $\int_1^x y(x)\mathrm{d}x$，据题意有

$$\int_1^x y(x)\mathrm{d}x=2xy(x).$$

对 x 求导得到方程

$$y=2(y+xy'),$$

即

$$y'=-\frac{y}{2x}.$$

解此方程得

$$\ln y=-\frac{1}{2}\ln x+C.$$

曲线通过点(1,1)，故

$$C=0.$$

所求曲线为

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

例 10 求解方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+\cos\frac{y}{x}$.

解 该方程不是可分离变量型，应设法将其化成可分离变量型. 从形式上来看，可试着令 $u=\frac{y}{x}$，即 $y=ux$，显然 u 仍然是 x 的函数，故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

代入原方程得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+\cos u,$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\cos u.$$

此方程为可分离变量型，解此方程得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\cos u}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{dx}{x}.$$

两边求积分得

$$\ln\left|\tan\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|=\ln|x|+\ln C.$$

则

$$\tan\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=Cx,\ u=2\arctan(Cx)-\frac{\pi}{2},$$

即原方程的通解为

$$y=xu=x\left[2\arctan(Cx)-\frac{\pi}{2}\right].$$

一般,凡是形为 $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的方程都可令 $y=xu$,化成可分离变量型方程.

例 11　解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+y)^2$.

解　观察一下方程的特点,令 $x+y=u$,则 $y=u-x$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1.$$

代入原方程得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1=u^2,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\mathrm{d}x.$$

两边积分得

$$\arctan u=x+C,$$
$$u=\tan(x+C).$$

故原方程的通解为

$$y=u-x=\tan(x+C)-x.$$

从例 10 和例 11 中可以看出,某些方程通过变量代换便可化成可分离变量型,至于如何选择适当的变量代换,主要还是观察方程的特点. 习题中有几道这类方程,读者可先思考再看提示.

7.2.2　一阶线性微分方程

一阶线性微分方程的标准形式为

$$y'+P(x)y=Q(x). \tag{7.5}$$

当 $Q(x)=0$ 时,方程(7.5)为**线性齐次方程**,当 $Q(x)\neq0$ 时,方程(7.5)为**线性非齐次方程**. 显然对齐次方程

$$y' + P(x)y = 0. \tag{7.6}$$

可用分离变量法求解：

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\mathrm{d}x,$$

$$\ln y = -\int P(x)\mathrm{d}x + \ln C,$$

$$y = C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

对于非齐次方程(7.5)可以证明其解的形式为 $y = C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$.

即非齐次方程的解可通过将对应齐次方程的解的常数 C 变为函数 $C(x)$ 而得到. 此方法称为**常数变易法**. 现问题归结为如何求 $C(x)$.

将

$$y = C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x},$$

$$y' = -P(x)C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

代入(7.5)得

$$\frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}Q(x),$$

$$C(x) = \int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C.$$

故方程(7.5)的解为

$$\begin{aligned} y &= C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \\ &= \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right]. \end{aligned} \tag{7.7}$$

其中 C 为任意常数.

如将 y 改写成

$$\begin{aligned} y &= C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + \mathrm{e}^{-\int (x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int (x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\ &= Y + y^*, \end{aligned}$$

显然 Y 为(7.6)的通解，y^* 为(7.5)的一个特解，即线性非齐次方程的通解为对应齐次方程的通解 Y 加上非齐次方程的一个特解 y^*，解题时可以按常数变易法的步骤求解，亦可直接利用解的公式(7.7)(如例 13).

例 12 求方程 $y' + \frac{y}{x} = 2\ln x + 1$ 的通解.

解 先解对应的齐次方程

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

即

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x},$$

两边积分，得

$$y=\frac{C}{x},$$

变易常数，设

$$y=\frac{C(x)}{x},$$

求导后代入原方程，得

$$\frac{dC(x)}{dx}\cdot\frac{1}{x}+C(x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{C(x)}{x^2}=2\ln x+1,$$

$$\frac{dC(x)}{dx}=x(2\ln x+1).$$

即

$$\begin{aligned}C(x)&=\int(2x\ln x+x)dx\\&=\left(x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2\right)+\frac{1}{2}x^2+C\\&=x^2\ln x+C.\end{aligned}$$

故原方程的解为

$$\begin{aligned}y&=\frac{C(x)}{x}=\frac{1}{x}(x^2\ln x+C)\\&=\frac{C}{x}+x\ln x.\end{aligned}$$

例 13　解$(x+1)\frac{dy}{dx}-2y=(x+1)^4$.

解　此方程不符合标准形式(7.5)式，应先两边除以$(x+1)$得

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^3,$$

可知公式(7.7)中的$P(x)=-\frac{2}{x+1}$，$Q(x)=(x+1)^3$. 故

$$\int P(x)dx=-2\ln|x+1|,$$

$$e^{\int P(x)dx}=e^{-2\ln|x+1|}=\frac{1}{(x+1)^2},$$

$$e^{-\int P(x)dx}=(x+1)^2,$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx=\int(x+1)dx=\frac{1}{2}(x+1)^2.$$

代入公式(7.7)得

$$y=(x+1)^2\left[\frac{1}{2}(x+1)^2+C\right]$$

$$=C(x+1)^2+\frac{1}{2}(x+1)^4.$$

例 14 求解 $y'-y\cot x=2x\sin x$.

解 先解齐次方程 $y'-y\cot x=0$,

$$\frac{dy}{y}=\cot x dx.$$

$$\ln|y|=\ln|\sin x|+\ln C.$$

即

$$y=C\sin x.$$

变易常数,设 $y=C(x)\sin x$,则 $y'=\frac{dC}{dx}\sin x+C(x)\cos x$. 代入原方程得

$$\frac{dC}{dx}\sin x+C(x)\cos x-C(x)\cos x=2x\sin x.$$

故

$$\frac{dC}{dx}=2x,\ C(x)=x^2+C.$$

所以原方程的解 $y=(x^2+C)\sin x=C\sin x+x^2\sin x$.

例 15 求解 $\frac{dy}{dx}+2y=x$.

解 先解对应的齐次方程 $\frac{dy}{dx}+2y=0$,得

$$\frac{dy}{y}=-2dx.$$

于是

$$y=Ce^{-2x}.$$

变易常数,设 $y=C(x)e^{-2x}$,代入原方程得

$$\frac{dC}{dx}e^{2x}+C(x)(-2e^{-2x})+2C(x)e^{-2x}=x.$$

故

$$\frac{dC}{dx}=xe^{2x}$$

$$C(x)=\int xe^{2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx$$

$$=\frac{x}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C.$$

所以原方程的解为

$$y=C(x)e^{-2x}=Ce^{-2x}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}.$$

思考题

1. 方程 $y'+P(x)y=Q(x)$，如果 y_1 和 y_2 分别为它的解，试问 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 是否亦为此方程的解？

2. 如果某方程的解为

$\ln|x^2+1|=\ln|y^2+1|+C$，

能否化简成 $x^2+1=y^2+1+C$（C 为任意常数）？

3. 方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的解为什么形如

$$y=C(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

4. 试将 $y'=f(ax+by+c)$ 化为可分离变量型方程.

5. 方程 $y'+P(x)y=Q(x)y^a$（$a\neq 0,1$）称为贝努里方程，试将其与一阶线性方程形式对照，令 $z=y^{1-a}$ 而化成一阶线性方程，并解方程 $\frac{dy}{dx}-3xy=xy^2$.

6. 除了前面介绍的一阶微分方程之外，还有没有其他可以求解的一阶微分方程？

7. 将方程 $\cos x\frac{dy}{dx}+y\sin x=1$ 与标准形式(7.5)式相比，$P(x)=$？$Q(x)=$？试求解.

思考题解答

1. 将 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 及 $y'=C_1y'_1+C_2y'_2$ 代入方程左边，得

$$\begin{aligned} y'+P(x)y &= C_1[y'_1+P(x)y_1]+C_2[y'_2+P(x)y_2] \\ &= C_1Q(x)+C_2Q(x)=(C_1+C_2)Q(x). \end{aligned}$$

当 $C_1+C_2=1$ 时 y 为此方程的解.

当 $Q(x)\equiv 0$ 时 y 亦为此方程的解，并由此可知，对一阶线性齐次方程而言，解的线性组合仍为该方程的解，但对一阶线性非齐次方程，此结论不一定成立.

2. 这种化简是错误的，所给式子区别于

$$\ln|x^2+1|=\ln|y^2+1+C|.$$

正确的方法应将原式写成

$$\ln|x^2+1|=\ln|y^2+1|+\ln C\quad (C>0).$$

从而化简为

$$(x^2+1)=C(y^2+1)\quad (C>0).$$

3. 原方程可变形为

$$\frac{dy}{dx}=Q(x)-P(x)y,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{Q(x)}{y}\mathrm{d}x-P(x)\mathrm{d}x.$$

两边积分

$$\ln y=\int\frac{Q(x)}{y}\mathrm{d}x-\int P(x)\mathrm{d}x,$$

令

$$u(x)=\int\frac{Q(x)}{y}\mathrm{d}x,$$

有

$$\ln y=u(x)-\int P(x)\mathrm{d}x,$$

$$y=\mathrm{e}^{u(x)-\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

再令

$$C(x)=\mathrm{e}^{u(x)},$$

得

$$y=C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

4. 令 $u=ax+by+c$，则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

由于原方程为 $y'=f(u)$，故

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a+bf(u)\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}u}{a+bf(u)}=\mathrm{d}x.$$

此方程即为可分离变量型.

5. 将原方程化为 $y^{-a}y'+P(x)y^{1-a}=Q(x)$，令 $z=y^{1-a}$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-a)y^{-a}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\quad 即\quad y^{-a}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1-a}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.$$

原方程变为

$$\frac{1}{1-a}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+P(x)z=Q(x),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-a)P(x)z=(1-a)Q(x).$$

此方程即为一阶线性方程.

对方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-3xy=xy^2,a=2,$$

可令 $z=y^{1-2}=y^{-1}$，将方程化成

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+3xz=-x,$$

由此解得

$$z=C\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x^2}-\frac{1}{3}\ (C\ 为任意常数).$$

故原方程的解为

$$\frac{1}{y}=Ce^{\frac{3}{2}x^2}-\frac{1}{3}.$$

6. 可以求解的一阶微分方程还有其他形式. 例如

拉格朗日方程 $y=xf(y')+\varphi(y')$,

全微分方程 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$,其中$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

有兴趣的读者可参阅参考文献 1.

7. $P(x)=\tan x$,$Q(x)=\frac{1}{\cos x}$,$y=\sin x+C\cos x$.

7.3 特殊类型的二阶微分方程

二阶微分方程的一般形式为

$$\begin{cases}F(x,y,y',y'')=0,\\y(x_0)=y_0,\\y'(x_0)=y_1.\end{cases}$$

很自然会想到,设法将二阶微分方程降为一阶微分方程再行求解. 本节先介绍 3 种可以降阶的二阶微分方程及其解法,然后再介绍二阶常系数线性齐次方程及其解法.

7.3.1 $y''=f(x)$型

此类方程可用**直接积分法求解**. 第一次积分变为一阶微分方程

$$y'=\int f(x)\mathrm{d}x+C_1,$$

再次积分得

$$y=\int\left[\int f(x)\mathrm{d}x+C_1\right]\mathrm{d}x+C_2.$$

例 16 质量为 M 的质点受力的作用作直线运动,如果所受的力与时间成正比,质点的初始位移和速度均为零,求质点的位移 s 与时间 t 的函数关系.

解 设质点在时间 t 的位移为 $s(t)$. 据题意列出方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=kt\ (k>0),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=\frac{kt}{m},$$

积分得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{k}{2m}t^2+C_1,$$

再次积分得

$$s=\frac{k}{6m}t^3+C_1t+C_2.$$

代入初始条件 $\begin{cases}s(0)=0\\ s'(0)=0\end{cases}$ 得

$$C_1=0,\quad C_2=0.$$

故

$$s(t)=\frac{k}{6m}t^3.$$

通过直接积分法求解的方法亦适用于高阶微分方程$\frac{d^ny}{dx^n}=f(x)$. 很显然,为求通解 y,只需连续对 x 积分 n 次.

例 17 解方程$\frac{d^3y}{dx^3}=\sin 2x$.

解 对 x 积分三次

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\int\sin 2x dx=-\frac{1}{2}\cos 2x+C_1,$$

$$\frac{dy}{dx}=\int\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+C_1\right]dx$$

$$=-\frac{1}{4}\sin 2x+C_1x+C_2,$$

$$y=\int\left[-\frac{1}{4}\sin 2x+C_1x+C_2\right]dx$$

$$=\frac{1}{8}\cos 2x+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3.$$

即

$$y=\frac{1}{8}\cos 2x+C_1x^2+C_2x+C_3.$$

7.3.2 $F(x,y',y'')=0$ 型

此类方程的特点为方程中**不显含** y,可令 $y'=P(x)$,则 $y''=P'$,原方程就降为一阶微分方程 $f(x,P,P')=0$,按一阶微分方程的解法,可解得

$$P=\varphi(x,C_1),$$

即

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x,C_1).$$

再积分便可得

$$y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2.$$

例 18 求方程$(1+x^2)y''=2xy'$满足初始条件 $y(0)=1,y'(0)=3$ 的特解.

解 令 $y'=P(x)$，则 $y''=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$，原方程变为

$$(1+x^2)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=2xP,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}P}{P}=\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

两边积分得

$$\ln|P|=\ln(1+x^2)+\ln C_1,$$
$$P=C_1(1+x^2).$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C_1(1+x^2).$$

故

$$y=\int C_1(1+x^2)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{C_1}{3}x^3+C_1x+C_2.$$

代入初始条件 $\begin{cases}y(0)=1\\y'(0)=3\end{cases}$ 得

$$C_1=3,\ C_2=1.$$

所求的特解为

$$y=x^3+3x+1.$$

例 19 解 $(1+\mathrm{e}^x)y''+y'=0$.

解 令 $y'=P(x)$，原方程变为

$$(1+\mathrm{e}^x)P'+P=0,$$
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=-\frac{P}{1+\mathrm{e}^x},$$
$$\frac{\mathrm{d}P}{P}=-\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\frac{-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}\mathrm{d}x.$$

两边积分，得 $\ln|P|=\ln|\mathrm{e}^{-x}+1|+\ln C_1$,

$$P=C_1(\mathrm{e}^{-x}+1).$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C_1(\mathrm{e}^{-x}+1).$$

故

$$y=C_1(x-\mathrm{e}^{-x})+C_2.$$

7.3.3 $F(y,y',y'')=0$ 型

此类型的特点为方程中**不显含** x，可将 y' 看成是 y 的函数，令 $y'=Q(y)$，由于

y 是 x 的函数，$y'=Q(y)$ 可以看成是 x 的复合函数 $y'=Q[y(x)]$，故

$$y''=\frac{dQ}{dx}=\frac{dQ}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=Q\cdot\frac{dQ}{dy}.$$

原方程降为

$$Q\frac{dQ}{dy}=f(y,Q).$$

解此一阶微分方程，得

$$Q=\varphi(y,C_1).$$

即

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(y,C_1).$$

故

$$\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=dx.$$

原方程的通解为

$$\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2.$$

例 20 解 $(y-1)y''=2y'^2$.

解 令 $y'=Q(y)$，则 $y''=Q\frac{dQ}{dy}$. 原方程变为

$$(y-1)\cdot Q\frac{dQ}{dy}=2Q^2.$$

当 $Q\neq 0$ 时，有

$$\frac{dQ}{Q}=\frac{2}{y-1}dy.$$

两边积分，得 $\ln|Q|=2\ln|y-1|+\ln C_1$，故

$$Q=C_1(y-1)^2.$$

即

$$\frac{dy}{dx}=C_1(y-1)^2.$$

分离变量，得

$$\frac{dy}{(y-1)^2}=C_1dx,$$

$$-\frac{1}{y-1}=C_1x+C_2.$$

由于 C_1,C_2 为任意常数，即 $\frac{1}{y-1}=C_1x+C_2$，故

$$y=\frac{1}{C_1x+C_2}+1.$$

当 $Q\equiv 0$ 时，由 $\frac{dy}{dx}=0$ 得 $y=C$.

这个解即是上面求得的通解中 $C_1=0$ 的情况,故方程的解为

$$y=\frac{1}{C_1x+C_2}+1.$$

例 21　求方程 $yy''+y'^2=y'$ 的通解.

解　设 $y'=Q(y)$,则 $y''=Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}y}$,代入原方程得

$$yQ\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}y}+Q^2=Q.$$

当 $Q\neq 0$ 时,

$$y\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}y}=-(Q-1),$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{Q-1}=-\frac{\mathrm{d}y}{y},$$

$$\ln(Q-1)=-\ln y+\ln C_1,$$

$$Q-1=\frac{C_1}{y}.$$

则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{C_1}{y}+1=\frac{C_1+y}{y},$$

$$\frac{y+C_1-C_1}{C_1+y}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x.$$

故方程通解为 $y-C_1\ln(y+C_1)=x+C_2$. 当 $Q\equiv 0$ 时,$y\equiv C_1$.

7.3.4　二阶常系数线性齐次方程

二阶常系数线性齐次方程的形式为

$$y''+py'+qy=0\ (p,q\ 为常数).$$

从方程的形式想到:若令 $y=\mathrm{e}^{\lambda x}$,则 $y'=\lambda\mathrm{e}^{\lambda x}$,$y''=\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x}$,代入原方程,有

$$(\lambda^2+p\lambda+q)\mathrm{e}^{\lambda x}=0,$$

即

$$\lambda^2+p\lambda+q=0.$$

这个关于 λ 的方程叫做原方程的**特征方程**(characteristic eguation),它的两个根 λ_1,λ_2 有 3 种情况,可以证明

1. 当 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时,通解 $y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$.
2. 当 $\lambda_1=\lambda_2$ 时,通解 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$.
3. 当 $\lambda=\alpha\pm\beta i$ 时,通解 $y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

例 22　求微分方程 $4y''-4y'+y=0$ 满足初始条件 $x=0$ 时 $y=2,y'=5$ 的特解.

解　该方程相应的特征方程为

$$4\lambda^2-4\lambda+1=0.$$

解得

$$\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}.$$

故通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{\frac{x}{2}}.$$

因为

$$y'=\frac{1}{2}C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}C_2xe^{\frac{x}{2}},$$

代入初始条件，得

$$\begin{cases}C_1=2,\\ \frac{1}{2}C_1+C_2=5.\end{cases}$$

故

$$C_1=2,\quad C_2=4.$$

方程的特解为

$$y=(2+4x)e^{\frac{x}{2}}.$$

例 23 求方程 $y''+3y'+2y=0$ 的通解.

解 特征方程为

$$\lambda^2+3\lambda+2=0,$$

解得

$$\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,$$

故原方程的特解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}.$$

例 24 求方程 $y''-6y'+10y=0$ 的通解.

解 特征方程为

$$\lambda^2-6\lambda+10=0,$$

解得

$$\lambda_1=3+i,\lambda_2=3-i,$$

故通解为

$$y=e^{3x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

思考题

1. 求二阶微分方程的特解需要两个初始条件，那么求 n 阶微分方程的特解需要多少个初始条件？它们的形式如何？

2. 形如 $ax^2y''+bxy'+cy=0$ 的方程称为欧拉方程，令 $x=e^t$，试将该方程化为自变量为 t 的关于 y 的常系数线性齐次方程.

3. 利用上题结果求解方程

$$x^2y''-3xy'+5y=0.$$

4. 常系数线性齐次方程的解法可否推广到 n 阶方程 $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0$.

5. 有没有其他确定特解的情况?

6. 试用降阶法求二阶方程

$$y''+4xy'+(4x^2+2)y=0$$

的通解.

7. 如何解方程 $F(y',y'')=0$.

思考题解答

1. 求 n 阶微分方程的特解需要 n 个初始条件,其形式为

$$y(x_0)=y_0,$$
$$y'(x_0)=y_1,$$
$$\vdots$$
$$y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}.$$

2. 由 $x=\mathrm{e}^t$ 得 $t=\ln x$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

又

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_x'=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

即

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

故原方程变为

$$a\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+cy=0,$$

即

$$a\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+(b-a)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+cy=0.$$

3. 令 $x=\mathrm{e}^t$,则原方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+5y=0.$$

由此解得

$$y=\mathrm{e}^{2t}(C_1\cos t+C_2\sin t).$$

将 $t=\ln x$ 代入并考虑 $x<0$ 的情况，得

$$y=x^2(C_1\cos\ln|x|+C_2\sin\ln|x|).$$

4. 可以. 其特征方程和解的形式可参阅参考文献[1].

5. 有的. 许多物理问题中不是根据初始条件，而是根据在区间端点的值来求微分方程的特解，这类问题称为边值问题. 在二阶方程的情况下，对区间 (a,b) 的边值条件的形式为

$$\begin{cases}\alpha_0 y(a)+\beta_0 y'(a)=A,\\ \alpha_1 y(b)+\beta_1 y'(b)=B,\end{cases}$$

其中 $\alpha_0,\alpha_1,\beta_0,\beta_1$ 是不同时为零的已知常数，A,B 为已知常数.

目前医学中许多实际问题用工程学方法解决，因此今后或许会遇到这种情况.

6. 方程可变形为 $y''+2xy'+2xy'+4x^2y+2y=0$，即

$$y''+2xy'+2y+2x(y'+2xy)=0.$$

观察该方程的特点，可令 $u=y'+2xy$，原方程变为

$$u'+2xu=0.$$

解得

$$u=C_1\mathrm{e}^{-x^2},$$

亦即

$$y'+2xy=C_1\mathrm{e}^{-x^2}.$$

解此一阶线性方程得

$$y=(C_2+C_1x)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

该题说明降阶的方法是比较灵活的，不限于前面介绍的几种方法，可视方程的特点选择变量代换.

7. 可令 $y'=P(x)$，则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$，然后求解. 亦可令 $y'=Q(y)$，则 $y''=Q\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}y}$，然后求解. 读者可视方程的特点灵活选择.

7.4 拉氏变换与常系数线性非齐次方程的特解

读者熟知，代数中通过取对数可将乘除法运算简化为加减法运算. 类似地，在微积分中，拉氏变换可将微积分运算简化为代数运算，从而使线性微分方程求解变得容易.

7.4.1 拉氏变换

拉氏变换(laplace transformation)是一种积分变换. 函数 $y=f(t)$ 的拉氏变换即是将 $f(t)$ 乘以 e^{-st}，再对 t 从 0 到 $+\infty$ 进行积分. 这样，原来时域 t 上的函数 $f(t)$ 经变换后变成 s 域上的函数 $F(s)$，用数学式可如下表达：

定义 1 设函数 $f(t)$，当 $t\geqslant 0$ 时有定义，且对于参量 s，积分

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

存在,则此积分为 s 的函数,写为

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt. \tag{7.8}$$

称函数 $F(s)$ 为 $f(t)$ 的**拉氏变换(像函数)**记为 $F(s)=L[f(t)]$,而 $f(t)$ 则称为 $F(s)$ 的**拉氏逆变换**(inverse laplace transformation)(**像原函数**),记为 $f(t)=L^{-1}[F(s)]$.

例 25　求函数 $f(t)=t$,当 $s>0$ 时的拉氏变换.

解

$$\begin{aligned} \mathrm{L}[t] &= \int_0^{+\infty} te^{-st}dt \\ &= -\frac{1}{s}te^{-st}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}dt \\ &= \frac{1}{s^2}(s>0), \end{aligned}$$

所以,当 $s>0$ 时,$\mathrm{L}[t]=\frac{1}{s^2}$.

用同样的方法可以求得,当 n 为正整数时

$$\mathrm{L}[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}.$$

例 26　求指数函数 $f(t)=e^{kt}$ 的拉氏变换(k 为常数).

解　$\mathrm{L}[e^{kt}] = \int_0^{+\infty} e^{kt}e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-k)t}dt$,

当 $s>k$ 时,这个积分收敛,且有

$$\int_0^{+\infty} e^{-(s-k)t}dt = \frac{1}{s-k},$$

所以

$$\mathrm{L}[e^{kt}]=\frac{1}{s-k}\quad (s>k).$$

用上述方法可以求出许多函数的拉氏变换,但实际工作中,并不要求按(7.8)式具体计算,可直接查附录二.

例如　$\mathrm{L}[A]=\frac{A}{s}, \mathrm{L}^{-1}[A/s]=A$,

$$\mathrm{L}[\sin at]=\frac{a}{s^2+a^2},\ \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right]=\sin at,$$

$$\mathrm{L}[\cos at]=\frac{s}{s^2+a^2}, \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right]=\cos at.$$

7.4.2　拉氏变换的性质

利用积分的运算性质,可以证明拉氏变换的下述性质.

(1) 线性性质

若 a,b 为常数，$L[f_1(t)]=F_1(s)$，$L[f_2(t)]=F_2(s)$，则有

$$L[af_1(t)+bf_2(t)]=aL[f_1(t)]+bL[f_2(t)]$$
$$=aF_1(s)+bF_2(s).$$

例 27　求 $L[2\sin t-5\cos t]$.

解　因为 $L[\sin t]=\dfrac{1}{s^2+1}$，$L[\cos t]=\dfrac{s}{s^2+1}$，故

$$L[2\sin t-5\cos t]=2L[\sin t]-5L[\cos t]$$
$$=\frac{2}{s^2+1}-\frac{5s}{s^2+1}=\frac{2-5s}{s^2+1}.$$

（2）微商性质

若 $L[f(t)]=F(s)$，则有

$$L[f'(t)]=sF(s)-f(0);$$
$$L[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0).$$

依此类推，有

$$L[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0).\qquad(7.9)$$

由微商的性质可知，一个函数 $f(t)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(t)$ 经拉氏变换得到一个以 s 为变量的代数式，于是，导函数的运算经拉氏变换化为代数运算. 下面，利用以上两个性质来解微分方程.

7.4.3　用拉氏变换求常系数线性非齐次方程的特解

例 28　解 $\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}-y=e^{at} & ①\\ y(0)=-1 & ②\end{cases}$

解　将①式两边进行拉氏变换，利用线性性质，得

$$L\left[\frac{dy}{dt}\right]-L[y]=L[e^{at}].$$

由于

$$L\left[\frac{dy}{dt}\right]=sL[y]-y(0),$$

则有

$$sL[y]-y(0)-L[y]=L[e^{at}],$$

即

$$(s-1)L[y]+1=L[e^{at}].$$

查拉氏变换表得 $(s-1)L[y]+1=\dfrac{1}{s-a}$，即

$$L[y]=\left[\frac{1}{s-a}-1\right]\frac{1}{(s-1)}$$
$$=\frac{1+a-s}{(s-1)(s-a)}.$$

现要求查拉氏变换表求出 y，因表中没有形如等式右边的像函数，故将等式右边分

解成部分分式. 设

$$\frac{1+a-s}{(s-1)(s-a)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-a},$$

必须

$$A(s-a)+B(s-1)=1+a-s,$$

即

$$\begin{cases}A+B=-1,\\ -aA-B=1+a.\end{cases}$$

解得

$$A=-\frac{a}{a-1},\ B=\frac{1}{a-1}.$$

故

$$\begin{aligned}L[y]&=-\frac{a}{a-1}\cdot\frac{1}{s-1}+\frac{1}{a-1}\cdot\frac{1}{s-a}\\&=\frac{1}{a-1}\left[\frac{1}{s-a}-\frac{a}{s-1}\right].\end{aligned}$$

由于 $L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]=e^{t}$, $L^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=e^{at}$, 故

$$\begin{aligned}y&=\frac{1}{a-1}L^{-1}\left[\frac{1}{s-a}-\frac{a}{s-1}\right]\\&=\frac{1}{a-1}(e^{at}-ae^{t}).\end{aligned}$$

由上例知，用拉氏变换解微分方程的步骤为：

(a) 对方程取拉氏变换得关于 $L[y]$ 的代数方程；

(b) 解此代数方程得 $L[y]$；

(c) 对 $L[y]$ 取拉氏逆变换，得方程的解 y.

例 29　解 $\begin{cases}y''+4y=\sin x & ①\\ y(0)=0 & ②\\ y'(0)=0 & ③\end{cases}$

解　将①式两边取拉氏变换，得

$$L[y'']+4L[y]=L[\sin x].$$

利用微商性质，得

$$s^2L[y]-sy(0)-y'(0)+4L[y]=\frac{1}{s^2+1}.$$

代入②,③得

$$(s^2+4)L[y]=\frac{1}{s^2+1},$$

即

$$L[y]=\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+4}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4}\right].$$

故方程的特解为

$$y = \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\mathrm{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) - \mathrm{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]$$

$$= \frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{6}\sin 2x.$$

拉氏变换只适用于求常系数线性微分方程的特解. 对于二阶常系数线性非齐次方程

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{7.10}$$

通常先求出相应的齐次方程

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{7.11}$$

的通解

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

然后求出(7.10)的某一个特解 y^*,则(7.10)的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*,$$

即非齐次方程(7.10)的通解等于其相应的齐次方程(7.11)的通解加上方程(7.10)的某一个特解.

例 29 中,相应的齐次方程为

$$y'' + 4y = 0,$$

特征方程为

$$\lambda^2 + 4 = 0.$$

解得

$$\lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i.$$

故齐次方程的通解为

$$Y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

加上前面所求得的特解

$$y^* = \frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{6}\sin 2x,$$

故非齐次方程的通解为

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{6}\sin 2x.$$

由于 C_2 是任意常数,将 $C_2\sin 2x$ 和 $\frac{1}{6}\sin 2x$ 合并成一项得

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{3}\sin x.$$

思考题

1. 拉氏变换除了已介绍的性质之外，还有其他性质吗？
2. 除了拉氏变换外，还有其他变换吗？
3. 不是常系数线性方程能不能用拉氏变换求特解？
4. 求常系数线性方程的特解还有其他方法吗？

思考题解答

1. 拉氏变换是一种特殊的数学处理方法，除了已介绍的性质外还有许多其他性质，故在工程数学，特别是信号处理中用得很多. 医学中各种信号（如脑电图、心电图等）都可采用工程数学的分析方法进行分析. 有兴趣的读者可参阅信号与系统方面的专业书.

2. 变换方法有好几种. 如傅氏变换(fourier transformation)、z 变换等.

3. 不能. 这是由拉氏变换的性质决定的.

4. 有的. 常见的有待定系数法、算子法、幂级数法等. 这些方法各有特色. 有兴趣的读者可参阅常微分方程专业书.

7.5　一阶常系数线性微分方程组

微分方程与其他方程一样，可由几个不同未知函数的方程联立成方程组. 解方程组时，**可以用消去某些未知函数**的方法，先求出其中一个函数，再求其他函数，**也可用拉氏变换**求方程的特解，读者可视具体情况选用不同的方法.

例 30　求微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-3x+y & ① \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=8x-y & ②\end{cases}$$

满足初始条件 $x(0)=1, y(0)=4$ 的解.

解法 1　由①得 $y=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+3x$，　③

对③两边求导，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+3\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.　④

将③，④代入②，得

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=8x-\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+3x\right),$$

即

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}-5x=0.$$

此方程的特征方程为

$$\lambda^2+4\lambda-5=0,$$

解得 $\lambda_1=-5,\lambda_2=1$，故

$$x=C_1e^{-5t}+C_2e^t.$$

将 x 和 $\frac{dx}{dt}$ 代入③，得

$$\begin{aligned}y&=-5C_1e^{-5t}+C_2e^t+3C_1e^{5t}+3C_2e^t\\&=-2C_1e^{-5t}+4C_2e^t.\end{aligned}$$

代入初始条件，得

$$\begin{cases}C_1+C_2=1,\\-2C_1+4C_2=4.\end{cases}$$

由此解得

$$\begin{cases}C_1=0,\\C_2=1.\end{cases}$$

故所求特解为

$$\begin{cases}x=e^t,\\y=4e^t.\end{cases}$$

解法 2 设 $L[x]=X(s)$，$L[y]=Y(s)$，对方程组取拉氏变换得

$$\begin{cases}sX(s)-x(0)=-3X(s)+Y(s),\\sY(s)-y(0)=8X(s)-Y(s).\end{cases}$$

代入初始条件得

$$\begin{cases}sX(s)-1=-3X(s)+Y(s),\\sY(s)-4=8X(s)-Y(s).\end{cases}$$

解此方程组得

$$\begin{cases}X(s)=\dfrac{1}{s-1},\\Y(s)=\dfrac{4}{s-1}.\end{cases}$$

查拉氏变换表，得所求的特解为

$$x(t)=L^{-1}[X(s)]=L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]=e^t,$$

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left[\frac{4}{s-1}\right]=4e^t.$$

例 31 解微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3y - 2x & ① \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2y - x & ② \end{cases}$$

解　先消去未知函数 y；由②得

$$y=\frac{1}{2}(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x). \quad ③$$

两边求导得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}). \quad ④$$

将③，④代入①得

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=0.$$

此方程为二阶常系数线性微分方程，其特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+1=0$，则

$$\lambda=1\ .$$

通解为

$$x=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^t. \quad ⑤$$

将⑤代入③，得

$$y=\frac{1}{2}(2C_1+C_2+2C_2t)\mathrm{e}^t.$$

故方程组的通解为

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2t)\mathrm{e}^t, \\ y = \dfrac{1}{2}(2C_1 + C_2 + 2C_2t)\mathrm{e}^t. \end{cases}$$

例 32　**解**
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-y=\mathrm{e}^t & ① \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+x=\sin t & ② \\ x(0)=1 & ③ \\ y(0)=0 & ④ \end{cases}$$

解　设 $X(s)=L[x(t)]$，$Y(s)=L[y(t)]$，将方程①，②取拉氏变换，并用③，④代入，得

$$\begin{cases} sX(s) - Y(s) = \dfrac{1}{s-1} + 1, \\ X(s) + sY(s) = \dfrac{1}{s^2+1}. \end{cases}$$

解以上方程组，得

$$\begin{cases} X(s) = \dfrac{s}{(s-1)(s^2+1)} + \dfrac{s}{s^2+1} + \dfrac{1}{(s^2+1)^2}, \\ Y(s) = -\dfrac{1}{(s-1)(s^2+1)} - \dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{s}{(s^2+1)^2}. \end{cases}$$

为求逆变换，将上两式右端展为部分分式，则有

$$\begin{cases} X(s) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{s}{s^2+1} + \dfrac{2}{(s^2+1)^2}\right], \\ Y(s) = \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{s-1} - \dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{s}{s^2+1} + \dfrac{2s}{(s^2+1)^2}\right]. \end{cases}$$

查拉氏变换表，得

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{L}^{-1}[X(s)] = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^t + 2\sin t + \cos t - t\cos t), \\ y(t) = \mathrm{L}^{-1}[Y(s)] = \dfrac{1}{2}(-\mathrm{e}^t - \sin t + \cos t + t\sin t). \end{cases}$$

思考题

1. 有其他方法求拉氏逆变换吗？
2. 微分方程的解是否都存在？
3. 如果实际问题中列出的方程无法用已学的方法解，还可采用哪些方法解决？
4. 归纳所介绍的微分方程类型及解法.

思考题解答

1. 有的. 但是要用到复变函数的知识，有兴趣的读者可参阅参考文献[7].

2. 不一定. 微分方程解的存在性、唯一性、连续性是对方程有一定要求的，这在微分方程专业书中有相应的定理.

3. 1) 采用幂级数解法(参阅 8.3 节)；

2) 用数值解法求出某些点的函数近似值(参阅数值方法方面参考书或参考文献[1,3]).

3) 不解方程，只根据方程的系数，用定性理论讨论方程的解的性质(参阅微分方程定性理论方面的书).

4. 略.

7.6　微分方程在医药学中的应用

在前面几节中，介绍了解微分方程的一些基本方法. 用微分方程描述实际过程，然后求出其解，以反映过程的内在规律，这种解决问题的方法称为建立数学模型. 下面，我们先介绍一些有关数学模型的知识，然后再举实例.

7.6.1　数学模型简介

数学模型(mathematiical model)是指反映客观事物规律所包含的各个因素之间关系的数学表达式(等式、图像、框图等). 它描述了客观事物的特征及其内在联系. 建立数学模型实际上就是收集数据并将数据进行数学处理的过程. 有了数学模

型,便可以用数学计算或数学推理方法,对客观过程从定性分析发展为定量研究,从而更深入地了解事物变化的特点、变化趋势等客观规律.

数学模型可按不同的方式进行分类,按变量性质来分,可分为确定性模型和随机性模型;按研究的方法来分,可分为初等模型、微分方程模型、运筹模型、概率模型等;按研究对象所在的领域分,可分为经济模型、生态模型、人口模型、药动学模型等.还有其他分类方法,这里就不一一列举了.

7.6.2　建模时注意的问题

有人说,数学模型是应用数学的艺术.建立数学模型就像掌握艺术那样,并非那么容易也没有普遍适用的方法和技巧,在此只强调两个必须注意的问题.

(1) 明确目的,选择主要因素

人体是一种特殊的机器,它所包含的"零件"如宇宙包含万物那样错综复杂,变化多端,并与宇宙之万物有千丝万缕的联系.建模时往往能分析出诸多因素,例如研究某种传染病的传播,其中需分析的因素有疾病的传染力、潜伏期、人群的密度、人群的流动性、年龄、人群中各个体的免疫力、患病者的死亡率、病人的隔离条件、反复感染的可能性、流行季节的气温等.若将这么多因素都考虑进去,且不说其工作量之大的困难,就算花了九牛二虎之力建立了模型,也不一定能明确地反映其中的规律性,因此必须对问题加以简化,从不同的侧面来分析所需考虑的因素,舍掉次要因素,这样既容易建立模型,又能使所建立的模型反映本质的规律.当然同一个对象,由于所考虑的侧面不同,可以建立不同的数学模型,例如研究传染病的传播规律,如果只考虑其与年龄的关系,那么就必须把年龄等因素作为主要因素,可以舍掉一些其他因素.如果考虑其与人口密度的关系,那么就必须把人口密度等因素作为主要因素而可以忽略一些次要因素,这样建立的模型能简洁明了地反映出规律内在联系的本质.

(2) 模型需评估和修改

由于建模过程中简化了假设,舍掉了一些可以忽略或暂不考虑的因素,所以,建立的模型是否反映了客观实际,需要加以评估.如果此模型计算出来的理论数值与实际观察的数值较为吻合,理论上的推理符合客观实际并对客观实际有指导意义,则建立的模型是成功的,如果理论值与实测值差别太大,推理不符合客观规律,则模型是失败的,这时对实际问题所作的简化及所选择的主次因素要重新加以分析并建立修改模型.

建立数学模型的步骤大致归纳为:

1) 观察、收集、分析所研究对象的有关数据;

2) 简化假设,确定主要因素及相互关系;

3) 建立模型并求解模型;

4) 评估模型、修改模型,使之符合实际.

7.6.3 应用实例

下面介绍几个微分方程的模型，希望读者从中得到启发，学会一种有效的研究方法.

例 33 生物自然增长的数学模型.

解 设 $N(t)$ 为生物总数，n 为出生率，m 为死亡率，则

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = nN - mN = (n - m)N. \tag{7.12}$$

我们先假设 m，n 均为常数，$n-m=k(k>0)$，则(7.12)式变为

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = kN,$$

解得

$$N = Ce^{kt}.$$

这个模型是否符合实际呢？从表达式可知 N 随时间 t 的增长将无限制增长，这显然不符合生物增长的实际情况. 于是我们修改模型，重新考虑所简化的假设(m，n 均为常数). 事实上，当自然资源丰富，生物生存条件较好时，出生率增加，死亡率减少；在该生物总数过多资源不足的情况下，出生率减小而死亡率增加，亦即 m，n 为 N 的函数，假定从以往实际资料分析知

$$n = a - bN,$$

$$m = p + qN(\text{常数 } a,b,p,q > 0),$$

则

$$\begin{aligned} n - m &= (a - p) - (b + q)N \\ &= (b + q)\left[\frac{a - p}{b + q} - N\right] = k(h - N), \end{aligned}$$

其中 $k=b+q$，$h=\frac{a-p}{b+q}$，于是方程(7.12)变为

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = k(h - N)N.$$

解此方程得

$$\frac{\mathrm{d}N}{N(h - N)} = k\mathrm{d}t,$$

$$\frac{1}{h}\left[\frac{1}{N} + \frac{1}{h - N}\right]\mathrm{d}N = k\mathrm{d}t,$$

$$\ln \frac{N}{h - N} = hkt + C_1,$$

$$\frac{h-N}{N}=Ce^{-hkt}.$$

如果当 $t=t_0$ 时，$N=N_0$，有

$$\frac{h-N_0}{N_0}=Ce^{-hkt_0},$$

$$C=\frac{h-N_0}{N_0}e^{hkt_0}.$$

故

$$\frac{h-N}{N}=\frac{h-N_0}{N_0}e^{-hk(t-t_0)}, \tag{7.13}$$

$$N=\frac{h}{1+\dfrac{h-N_0}{N_0}e^{-hk(t-t_0)}}, \tag{7.14}$$

其图像为 S 形曲线(图 7.3)，称为 **logistic 曲线**.

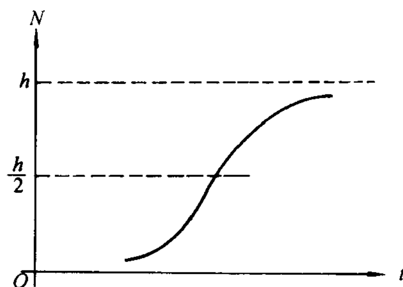


图 7.3

分析模型(7.14)：

(a) 当 $t\to+\infty$ 时，$N\to h$，称 $h=\dfrac{a-p}{b+q}$ 为生物总数的极限.
$k=b+q$ 为生命系数，k 值越小则 h 值越大.

(b) 由于 $\dfrac{dN}{dt}=k(h-N)N=k(hN-N^2)$，故

$$\begin{aligned}\frac{d^2N}{dt^2}&=[k(hN-N^2)]_t'\\&=k(h-2N)\frac{dN}{dt}.\end{aligned}$$

当 $\dfrac{d^2N}{dt^2}=0$ 时，有

$$h-2N=0,\ N=\frac{h}{2}.$$

因此，当 $N<\dfrac{h}{2}$ 时，$\dfrac{d^2N}{dt^2}>0$，$\dfrac{dN}{dt}$ 是递增的；

当 $N>\frac{h}{2}$ 时，$\frac{d^2N}{dt^2}<0$，$\frac{dN}{dt}$ 是递减的.

$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{dN}{dt}=\lim\limits_{N\to h}k(h-N)N=0.$

这表明生物总数达到其极限值一半以前的时期是加速生长时期，过了极限值一半以后的时期是减速生长时期，最后生长速度趋于零.

(c) 有人对美国人口加以统计，在 1950 年、1960 年和 1970 年人口总数分别为 15227 万、18068 万和 20488 万，将这 3 个数据代入(7.13)式，其中 $t_0=1950$，则有

$$\begin{cases} e^{hk(1960-1950)}=\dfrac{(h-15227)\cdot 18068}{15227(h-18068)}, & ① \\ e^{hk(1970-1950)}=\dfrac{(h-15227)\cdot 20488}{15227(h-20488)}. & ② \end{cases}$$

将①式两边平方即等于②式，

$$\left[\frac{18068(h-15227)}{15227(h-18068)}\right]^2=\frac{20488(h-15227)}{15227(h-20488)}.$$

解此方程，得

$$h=26646.$$

故

$$kh=0.045715.$$

据(7.14)式

$$N(1980)=\frac{26646}{1+0.74992e^{-0.045715(1980-1950)}}$$
$$=22386\ 万.$$

以上结果表明，由模型预测 1980 年美国人口为 22386 万. 实际上美国在 1980 年人口普查数字为 22650 万，比预测多 264 万，相对误差仅 1.2%. 说明对第一次简化假设进行修改后，第二次建立的模型经评估，理论值与实测值相差不大，模型是成功的.

例 34 药物动力学中的血药浓度一室模型.

解 在分析血药浓度时，要考虑 3 方面的因素：

(a) 药物吸收速度；

(b) 药物在体内的分布，如将肌体看成同质单元，则称药物为一室分布；如考虑药物进入体内不同系统，则称药物为两房室分布或多房室分布；

(c) 药物消除速度.

以下假设药物为一室分布，且消除为一级过程，即药物消除速度与当时体内药量成正比，从进药方式的 3 种不同情况研究血药浓度一室模型.

设时刻 t 体内药量为 $x(t)$，药物分布容积为 V.

a) 静脉注射

设一次剂量为 D，即 $x(0)=D$，由于药物为一级消除，有

$$\frac{dx}{dt}=-kx,$$

其中 $k>0$ 为消除速率常数，负号表示药量 x 随时间 t 的增加而减少. 解此微分方程，得

$$x=C_1e^{-kt} \qquad (C_1 \text{ 为任意常数}),$$

代入初始条件 $x(0)=D$，得

$$x=De^{-kt}.$$

两边除以 V，得所建的血药浓度 C 的一室模型为

$$C=C_0e^{-kt},$$

其中 $C_0=\frac{D}{V}$.

分析此模型，由于血药浓度随时间的增加而下降，临床上为达到一定的治疗效果，需要求出药物半衰期，从而确定给药时间间隔. 药物半衰期即为药物浓度降低为初始浓度的一半所需的时间，由

$$\frac{C_0}{2}=C_0e^{-kt}$$

解得

$$e^{-kt}=\frac{1}{2},$$

$$kt=-\ln\frac{1}{2}=\ln 2=\frac{\lg 2}{\lg e},$$

$$t=\frac{\lg 2}{0.4343k}=\frac{0.693}{k}.$$

如果再次注射药量 D，药物浓度又会增加，多次注射，则浓度呈波形变化.

b）静脉滴注

设单位时间内药物滴入量为 I，则可建立以下的微分方程

$$\frac{dx}{dt}=I-kx, \quad x(0)=0.$$

解此方程得

$$\frac{dx}{I-kx}=dt,$$

$$I-kx=C_1e^{-kt},$$

$$x=C_1e^{-kt}+\frac{I}{k}.$$

代入初始条件 $x(0)=0$，得

$$x=\frac{I}{k}(1-e^{-kt}).$$

两边除以 V，得

$$C(t)=\frac{I}{Vk}(1-e^{-kt}).$$

分析此模型，血药浓度开始时为 0，随时间的增加而逐渐增大，当 $t\to\infty$ 时，$C\to$

$\frac{I}{Vk}$，即药物浓度稳定在$\frac{I}{Vk}$这个水平，此浓度称为稳态浓度. 临床上根据药物的性能，选择不同的 I，使得血药浓度达到最佳治疗效果，又无毒性反应. 由于静脉滴注能使药物在体内的浓度保持一定，而静脉注射的血药浓度有一定波动. 由此便可理解，为什么有时用同样的药物治疗，静脉滴注效果好且毒副作用小.

c）口服或肌肉注射

设 $t=0$ 时，口服或肌注的药量为 D，x_a 表示吸收部位的药量. 由于药物不一定全部吸收，假设吸收分数（生物利用度）为 F，则 $t=0$ 时，$x_a(0)=FD$，吸收部位的药量逐步进入体内，其减少的速度为一级过程

$$\frac{\mathrm{d}x_a}{\mathrm{d}t}=-k_a x_a. \tag{7.15}$$

体内的药量 x 不断增加，其增加的速率即为吸收部分药量 x_a 的减少速率. 同时，体内药量 x 又按一级消除速率减少. 故 x 满足的方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=k_a x_a-kx,\\ x(0)=0.\end{cases} \tag{7.16}$$

对方程(7.15)和(7.16)取拉氏变换，并代入初始条件，得

$$\begin{cases}s\mathrm{L}[x_a]-FD=-k_a\mathrm{L}[x_a],\\ s\mathrm{L}[x]-0=k_a\mathrm{L}[x_a]-k\mathrm{L}[x].\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(s+k_a)\mathrm{L}[x_a]=FD,\\ (s+k)\mathrm{L}[x]=k_a\mathrm{L}[x_a],\end{cases}$$

$$\mathrm{L}[x_a]=\frac{FD}{s+k_a},$$

$$\mathrm{L}[x]=\frac{k_a\mathrm{L}[x_a]}{s+k}=\frac{FDk_a}{(s+k)(s+k_a)}$$

$$=\frac{FDk_a}{k_a-k}\left(\frac{1}{s+k}-\frac{1}{s+k_a}\right).$$

查拉氏变换表，得

$$x(t)=\frac{FDk_a}{k_a-k}(\mathrm{e}^{-kt}-\mathrm{e}^{-k_a t}),$$

$$C(t)=\frac{x(t)}{V}=\frac{FDk_a}{V(k_a-k)}(\mathrm{e}^{-kt}-\mathrm{e}^{-k_a t}). \tag{7.17}$$

分析此模型，由于

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}=\frac{FDk_a}{V(k_a-k)}(-k\mathrm{e}^{-kt}+k_a\mathrm{e}^{-k_a t}),$$

令$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}=0$，得

$$t_m=\frac{1}{k_a-k}\ln\frac{k_a}{k}.$$

代入(7.17)式，得血药浓度 C 的最大值

$$C_{\max}=\frac{k_aFD}{V(k_a-k)}(e^{-kt_m}-e^{-k_at_m}). \tag{7.18}$$

利用 $(-ke^{-kt_m}+k_ae^{-k_at_m})=0$，即 $e^{-k_at_m}=\frac{k}{k_a}e^{-kt_m}$，(7.18)式可简化为

$$C_{\max}=\frac{FD}{V}e^{-kt_m}.$$

医学中称 $C_{\max}$ 为峰浓度，t_m 为达峰时间.

根据(7.17)，可作出血药浓度 C 随时间 t 的变化曲线，简称 C-t 曲线(图 7.4).

在药物动力学中，C-t 曲线下的总面积 AUC 反映药物最终被吸收的完全程度. 由(7.17)得

$$\begin{aligned}AUC&=\int_0^{+\infty}C(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{k_aFD}{V(k_a-k)}(e^{-kt}-e^{-k_at})\mathrm{d}t\\&=\frac{k_aFD}{V(k_a-k)}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k_a}\right)=\frac{FD}{Vk}.\end{aligned}$$

可见，口服或肌注时，在一定剂量 D 下，AUC 与吸收分数 F 成正比，与消除速率常数 k 成反比. 对于静脉注射和静脉滴注可用同样方法作出 C-t 曲线，计算 AUC.

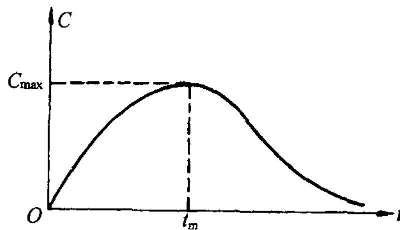


图 7.4

例 35　神经兴奋模型

根据 Blair 神经兴奋理论，在对神经施行电刺激时，兴奋离子向阴极移动，阴极附近离子浓度 C 增加的速率与所加的电压 V 成正比. 同时，随着浓度的增加，离子要扩散，其扩散速度与浓度差 $(C-C_0)$ 成正比，此处 C_0 表示离子的正常浓度，由此可建立以下微分方程

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}=k_1V-k_2(C-C_0)\ (k_1,k_2\ \text{为常数}). \tag{7.19}$$

令 $\varepsilon=C-C_0$，则 $\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}$，方程(7.19)可简化为

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}=k_1V-k_2\varepsilon\ .$$

此方程为可分离变量型，可解得

$$\varepsilon(t)=\frac{k_1}{k_2}V\ (1-e^{-k_2t}).$$

分析此模型，$\varepsilon(t)$ 为增函数，

$$\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=\frac{k_1}{k_2}V\ .$$

这表明经足够长的时间后，神经兴奋达到稳定状态，ε 的稳定值为 $\frac{k_1}{k_2}V$.

要产生神经兴奋，表明 ε 必须超过某一阈值 h，即要求

$$\frac{k_1}{k_2}V \geqslant h,\ V \geqslant \frac{k_2}{k_1}h.$$

以上结果说明为了产生兴奋，外加电压 V 所需的最小值为 $\frac{k_2}{k_1}h$.

例 36 传染病模型

前面已经提到过传染病的传播与多种因素有关，在讨论时，很难将所有因素同时考虑. 在此只介绍两种根据实际许可作出某些假设后所建立的传染病模型.

1) 无移除的简单流行病学模型　当人口流动不大时，忽略流动因素，设人口总数为常数 N. 又设在时间 t 的易感人数(未曾得病的人数)为 S，该人群中各成员之间的接触是均匀的，疾病有高度传染力，但尚未严重到发生死亡或需要隔离的程度，易感染者转化成感染者的变化率 $\frac{dS}{dt}$ 与当时的易感人数 S 和感染人数 I 的乘积成正比($\beta>0$，为比例系数). 则建立的模型方程为

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI,$$

而 $I = N - S$，即有

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S(N-S). \tag{7.20}$$

初始条件 $S(0) = N-1$(只有一个已感染). 解此方程得

$$\frac{1}{N}\left(\frac{1}{S}+\frac{1}{N-S}\right)dS = -\beta dt.$$

两边积分得

$$\frac{1}{N}\ln\frac{S}{N-S} = -\beta t + C,$$

$$\frac{S}{N-S} = Ce^{-\beta Nt}.$$

当 $t=0$ 时，$S = N-1$，故

$$\frac{S}{N-S} = (N-1)e^{-\beta Nt},$$

$$\frac{(N-S)(N-1)}{S} = e^{\beta Nt},$$

$$S = \frac{N(N-1)}{N-1+e^{\beta Nt}}.$$

在实践中，人们常常对流行曲线更感兴趣(图 7.5)，该曲线给出新病例发生的速率 $\frac{dI}{dt}$. 因为 $I = N-S$，故

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{dS}{dt} = \frac{\beta(N-1)N^2e^{\beta Nt}}{[(N-1)+e^{\beta Nt}]^2}. \tag{7.21}$$

$\frac{dI}{dt}$的极大值即为最高发病率，为此我们对 $\frac{dI}{dt}$ 再求一次导，得

$$\frac{d^2I}{dt^2}=\frac{[(N-1)-e^{\beta Nt}]\beta^2(N-1)N^2e^{\beta Nt}}{[(N-1)+e^{\beta Nt}]^3}.$$

令$\frac{d^2I}{dt^2}=0$，得

$$N-1=e^{\beta Nt},$$

$$t_m=\frac{\ln(N-1)}{\beta N}.$$

将 t_m 代入(7.21)得

$\left(\frac{dI}{dt}\right)_{\max}=\frac{\beta N^2}{4}$，即最高发病率为$\frac{\beta N^2}{4}$.

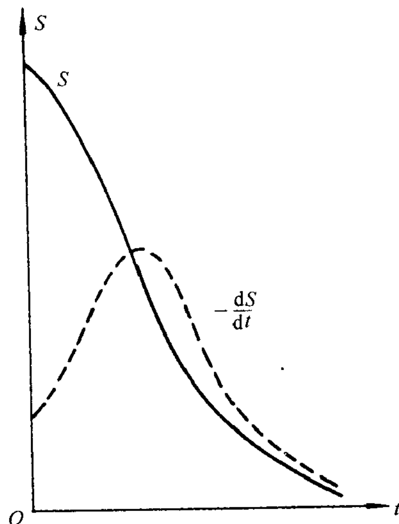


图 7.5

2）流行病学阈模型　在讨论此种模型时，假设的条件与前一种不同，即是易感者从易感者类 S 转入感染类 I，然后进入移除类 R，亦就是说患过此种病的人或患病至死或病愈后获得永久性免疫，则

$$N=I+R+S \text{ 即 } I=N-S-R,$$

$$\frac{dI}{dt}=-\frac{dS}{dt}-\frac{dR}{dt}.$$

而$\frac{dS}{dt}=-\beta SI$，$\frac{dR}{dt}=\gamma I$(比例常数 $\gamma>0$)，故得微分方程组

$$\begin{cases}\frac{dS}{dt}=-\beta SI, & ①\\ \frac{dI}{dt}=\beta SI-\gamma I, & ②\\ \frac{dR}{dt}=\gamma I. & ③\end{cases}$$

初始条件为

$$\begin{cases}S(0)=S_0>0,\\ I(0)=I_0>0,\\ R(0)=0.\end{cases}$$

此方程组称为 kermack-mckendrick 方程，其中 β 为感染率，γ 为移除率，$\rho=\gamma/\beta$ 称为相对移除率，由②知，$S_0<\rho$ 时

$$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0}<0.$$

又 S 为减函数，故 $S(t)\leqslant S_0$. $\frac{dI}{dt}$恒小于 0，即感染人数不断减少，疾病不发生流行.

同时可知,当 $S_0>\rho$ 时,$\frac{dI}{dt}$恒大于零,即感染人数不断增加. 当 $S_0=\rho$ 时,$\frac{dI}{dt}=0$. 这说明 ρ 是一个临界值,初始易感人数超过此值时,疾病才会发生流行. 这就是一种阈现象,当 $S=\rho$,I 达到极大值,即 $S=\frac{\gamma}{\beta}$时,感染人数达到高峰.

例 37 肿瘤生长模型

在研究肿瘤的生长规律时,不同类型的肿瘤在不同环境中,其生长速率不同,设 V 表示在时间 t 肿瘤的体积(重量或细胞个数),V 的增长速度与当时的 V 值成正比(比例系数为 k),但 k 值是个减函数,其减小的速度与当时的 k 值成正比,可建立方程

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt}=kV, & ① \\ \frac{dk}{dt}=-ak \quad (a\text{ 为常数},a>0). & ② \end{cases}$$

解此方程,由②得

$$k=Ae^{-at}. \qquad ③$$

其中 A 表示 $t=0$ 时的 k 值. 将③代入①,得

$$\frac{dV}{dt}=Ae^{-at}V.$$

解得

$$\ln V=-\frac{A}{a}e^{-at}+C.$$

将初始条件 $V(0)=V_0$ 代入得

$$C=\ln V_0+\frac{A}{a}.$$

故

$$V=V_0e^{\frac{A}{a}}(1-e^{-at}).$$

此函数称为描述肿瘤生长规律的**高姆拍茨函数**.

以上介绍的几种模型除了其医学意义之外,更主要的是介绍建模及运用所建立模型进行推理的方法. 如果读者能在处理实际问题中,建立合适的数学模型进行定量分析,那就是我们教材的成功之处,也是我们的最大欣慰.

思考题

1. 在静脉注射一室模型中,如果在时间 τ 后,第二次注射药量为 D,那么体内血药浓度的变化规律将怎样?

2. 上题中如果经 n 次注射，血药浓度的变化规律将怎样？

3. 药动学模型中，怎么知道某种药物为一室模型还是二室模型？模型中的 k 能否确定？

4. 为什么有些传染病模型可以用化学反应中的催化模型来建立？

思考题解答

1. 第一次注射后，血药浓度的变化规律为

$$C_1(t)=C_0\mathrm{e}^{-kt}\quad (C_0=\frac{D}{V}).$$

经过时间 τ，体内血药浓度为

$$C_1(\tau)=C_0\mathrm{e}^{-k\tau}.$$

再注入药量 D，血药浓度增加 $\frac{D}{V}=C_0$. 即第二次注入后初始浓度为 $C_0\mathrm{e}^{-k\tau}+C_0=C_0(1+\mathrm{e}^{-k\tau})$，据第一次注射后血药浓度的讨论方法可知，此后的血药浓度变化规律为

$$C_2(t)=C_0(1+\mathrm{e}^{-k\tau})\mathrm{e}^{-kt}.$$

2. 由上题讨论可知，经 n 次注射，血药浓度的变化规律为

$$\begin{aligned}C_n(t)&=C_0(1+\mathrm{e}^{-k\tau}+\mathrm{e}^{-2k\tau}+\cdots+\mathrm{e}^{-(n-1)\tau})\mathrm{e}^{-kt}\\&=C_0\frac{1-\mathrm{e}^{-nk\tau}}{1-\mathrm{e}^{-k\tau}}\mathrm{e}^{-kt},\end{aligned}$$

其中 t 是从第 n 次注射时刻算起的时间. 由此可推断：

(1)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}C_n(t)&=\lim_{n\to\infty}C_0\frac{1-\mathrm{e}^{-nk\tau}}{1-\mathrm{e}^{-k\tau}}\mathrm{e}^{-kt}\\&=C_0\frac{\mathrm{e}^{-kt}}{1-\mathrm{e}^{-k\tau}};\end{aligned}$$

(2) 对 $0\leqslant t\leqslant\tau$ （n 充分大后），

$$C_{\max}=\frac{C_0}{1-\mathrm{e}^{-k\tau}},$$

$$C_{\min}=\frac{C_0\mathrm{e}^{-k\tau}}{1-\mathrm{e}^{-k\tau}};$$

(3) 若已知某种药物的排除速率 k，表现分布容积 V，临床上的有效血药浓度 C 及给药时间间隔 τ，则每次注射剂量 D 可以计算如下：由

$$C=\frac{C_0\mathrm{e}^{-k\tau}}{1-\mathrm{e}^{-k\tau}}=\frac{D\mathrm{e}^{-k\tau}}{V(1-\mathrm{e}^{-k\tau})},$$

得

$$D=CV(\mathrm{e}^{k\tau}-1).$$

3. 药物在体内的房室分布可按脏器分，也可按生理系统分，这是由药物的特性来分析的. 另一方面，可以在时刻 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 测定血药浓度 $C(t_1), C(t_2), \cdots,$

$C(t_n)$，以 t 和 $C(t)$ 为坐标轴，作出 C-t 曲线的草图，由 C-t 曲线的形状来确定药物分布有几个房室.

系数 k 可由 C-t 曲线近似计算. 有兴趣的读者请参阅参考文献[4].

4. 数学模型是对大自然各种现象的高度抽象. 物理、化学、生物、医学等不同领域，其研究的现象不同，但从数量规律来说具有相同之处，各学科之间可以彼此借鉴. 从科研方法来说，称为移植法. 因此化学反应中的催化模型用于研究某些传染病的模型也是常理. 相信数学模型的强大生命力必将使生命科学的发展产生巨大飞跃.

习 题 7

1. 指出下列微分方程的阶数：

(1) $\frac{d^2y}{dx^2}-(\frac{dy}{dx})^3+12xy=0$；

(2) $(y'')^2+5(y')^4-y^5+x=0$.

2. 试验证下列函数均为方程$\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$的解($\omega>0$,常数).且指出哪些是通解，哪些是特解；哪些既非通解，又非特解：

(1) $y=\cos\omega x$；

(2) $y=C_1\cos\omega x$ （C_1是任意常数）；

(3) $y=\sin\omega x$；

(4) $y=C_2\sin\omega x$ （C_2是任意常数）；

(5) $y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$

（C_1,C_2是相互独立的任意常数）；

(6) $y=A\sin(\omega x+B)$

（A,B是相互独立的任意常数）.

3. 求下列微分方程的通解：

(1) $xy'-y\ln y=0$；

(2) $x\sec y\mathrm{d}x+(x+1)\mathrm{d}y=0$；

(3) $(xy^2+x)\mathrm{d}x+(y-x^2y)\mathrm{d}y=0$；

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{xy+x^3y}$；

(5) $\frac{x}{1+y}\mathrm{d}x-\frac{y}{1+x}\mathrm{d}y=0$；

(6) $\sec^2x\tan y\mathrm{d}x+\sec^2y\tan x\mathrm{d}y=0$.

4. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

(1) $\begin{cases}y'\sin x=y\ln y,\\ y|_{x=\frac{\pi}{2}}=e;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}y'=e^{2x-y},\\ y|_{x=0}=0;\end{cases}$ (3) $\begin{cases}y^2\mathrm{d}x+(x+1)\mathrm{d}y=0,\\ y(0)=1;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}\cot x\mathrm{d}y=\cot y\mathrm{d}x,\\ y(0)=\frac{\pi}{4}.\end{cases}$

5. 解下列微分方程：

(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$ （提示：令 $y=ux$）；

(2) $\frac{dy}{dx}=(x+y)^2$ （提示：令$(x+y)=u$）；

(3) $xy'+y=2\sqrt{xy}$ （提示：令 $u=xy$）；

(4) $y'=\frac{1}{x-y}+1$ （提示：令 $u=\frac{1}{x-y}$）.

6. 解下列一阶线性微分方程和贝努里方程：

(1) $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$；

(2) $xy'+y-e^x=0, y(1)=0$；

(3) $xy'+y=x^2+3x+2$；

(4) $xy'+(1-x)y=e^{2x}$；

(5) $\frac{dy}{dx}-\frac{n}{x}y=e^x x^n$ （n 为常数）；

(6) $\frac{ds}{dt}=-s\cos t+\frac{1}{2}\sin 2t$；

(7) $y'-y\tan x=\sec x, y(0)=0$；

(8) $\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$ （提示：令 $z=y^{1-3}=y^{-2}$）；

(9) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^4+y^3}{xy^2}$ （提示：令 $z=y^3$）；

(10) $(y\ln x-2)y\,dx=x\,dy$ （提示：令 $z=y^{-1}$）.

7. 解下列二阶及三阶微分方程：

(1) $y''+x=0$；

(2) $y'''-e^x-\sin x=0$；

(3) $(1+x^2)y''-2xy'=0$；

(4) $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{\sin t}\frac{dx}{dt}$；

(5) $\begin{cases} y''+\frac{1}{x}y'=0, \\ y(1)=2,\ y'(1)=1; \end{cases}$

(6) $y''=y'+x$；

(7) $\begin{cases} y''=(y')^2, \\ y(0)=0, \\ y'(0)=1; \end{cases}$

(8) $y^3y''=a$ $(a>0)$；

(9) $y''=1+(y')^2$；

(10) $y''\tan y=2(y')^2$；

(11) $\begin{cases} y''/y'=2yy'/(1+y^2), \\ y(0)=0, \\ y'(0)=1. \end{cases}$

8. 解下列二阶常系数齐次线性方程和欧拉方程：

(1) $y''-2y'=0$；

(2) $y''+6y'+13y=0$；

(3) $9y''-6y'+y=0$；

(4) $\begin{cases} y''+y=0, \\ y(0)=2, \\ y'(0)=1; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} y''+4y'+3y=0, \\ y(0)=6, y'(0)=10; \end{cases}$

(6) $x^2y''-4xy'+6y=0$ （提示：令 $x=e^t$）；

(7) $x^2y''+xy'+y=0$ （提示：令 $x=e^t$）.

9. 求下列函数的拉氏变换：

(1) $f(t)=3e^{-4t}$；

(2) $f(t)=t^2$；

(3) $f(t)=\sin\dfrac{t}{2}$；

(4) $f(t)=\sin t\cos t$；

(5) $f(t)=3t-te^t$；

(6) $f(t)=t^n e^{at}$；

(7) $f(t)=5\sin 2t-3\cos 2t$；

(8) $f(t)=\begin{cases} 3, & 0\leqslant t<2, \\ -1, & 2\leqslant t<4, \\ 0, & t\geqslant 4. \end{cases}$

10. 求下列函数的拉氏逆变换：

(1) $F(s)=\dfrac{5}{s+3}$；

(2) $F(s)=\dfrac{1}{s(s+a)(s+b)}$；

(3) $F(s)=\dfrac{4s-3}{s^2+4}$；

(4) $F(s)=\dfrac{1}{s^2-4}$.

11. 利用拉氏变换求下列方程的特解：

(1) $y'+y=3e^{2x}$，$x=0$ 时 $y=0$.

(2) $\begin{cases} y''+2y'-3y=e^{-t}, \\ y(0)=0,\ y'(0)=1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y''+2y'+5y=3e^{-x}\sin x, \\ y(0)=0,\ y'(0)=1; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} y''+4y'+4y=4(x+e^{-2x}), \\ y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$

12. 解下列微分方程组：

(1) $\begin{cases} x'+y=0, \\ x+y'=0, \end{cases} x(0)=1, y(0)=-1$；

(2) $\begin{cases} x'-y=0, \\ y'+x=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x+y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-x+4y, \end{cases}$ $t=0$ 时，$x=0,y=1$；

(4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=xy, \\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{y}{t}, \end{cases}$ $x(1)=e,y(1)=2$.

13. 一曲线通过点(1,0)，该曲线上任意点$M(x,y)$处切线斜率为x^2，求曲线的方程.

14. 放射性元素镭的衰变速度与镭的存在量R成正比，经测定镭的半衰期为1600年，设原始量为R_0，试求镭所存在的量R与时间t的函数关系.

15. 已知在一定条件下可以认为，伞兵降落过程中所受阻力与当时下降的速率成正比. 一个伞兵于$t=0$时从飞机上降落，求降落速率V和时间t之间的函数关系.

16. 有一药物溶液，在制成时每毫升含有主药500单位，经40天后分析，减为300单位. 假如该药的分解服从一级速率过程. 问分解到原有浓度一半需经过多少天？假如分解了30%即属无效，它的有效期是多少天？

17. 某药做静脉注射后，血药浓度的下降是一级速率过程，第一剂注射后1小时，测得血药浓度为初始浓度的$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，要使血药浓度不低于初始浓度的一半，需隔多少时间做第二次注射？

18. 研究血液中的血红细胞对K^{42}的摄取时，设Q为红细胞中K^{42}的含量，则有数学模型

$$\frac{dQ}{dt}=k_1-k_2Q,$$

其中k_1,k_2为正常数，若开始时红细胞中的K^{42}为零，求此模型的特解.

19. 某些疾病的传播或生物种群的生长有明显的周期性，下列方程可看作描述周期性现象的简单的数学模型

$$\frac{dx}{dt}=rx\cos t \qquad (r\text{ 为正常数}).$$

假定$t=0$时$x=x_0$，求x随时间t的变化规律，并作出在区间$[0,\pi]$上的一段曲线.

20. 医学上持续性颅内压P与容积V的关系表现为如下微分方程

$$\frac{dP}{dV}=aP(b-P) \quad (a,b\text{ 为常数}),$$

试求P与V的变化关系式.

$$\left(\text{提示：令 } z=P^{-1}\text{ 则}\frac{dP}{dV}=-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dV}\right)$$

21. 下列微分方程描述了两个竞争性生物种群对其生长速率的影响

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - x.\end{cases}$$

设 $t=0$ 时，$x=100$，$y=200$，求两个种群数量 x 和 y 的量变规律.

22. n 级化学反应方程为

$$\frac{dC}{dt} = -kC^n \qquad (n = 0,1,2),$$

$C(t)$表示反应物浓度，k 是反应速率常数，求 $C(t)$与时间 t 的关系式(设 $t=0$ 时浓度为 C_0).

23. 有的传染病流行过程是可逆的，一方面感染指征阴性者以速率常数 k_1 转变为感染指征阳性者，另一方面，阳性者又以速率常数 k_2 转为阴性者(k_1，k_2 为一级速率常数)，如果用 y 表示在时间 t 所观察的人群中阳性者的比率，则阴性者比率为 $1-y$. 于是我们可建立微分方程

$$\frac{dy}{dt} = -k_2 y + k_1(1-y).$$

设 $t=0$ 时，$y=0$，试求 y 的变化规律.

24. 设某药物静脉滴注的速度为常数，即每分钟为 1 g，同时又以与血液中该药物含量成比例的速度离开血液(速度常数为 k)，求血液中所含的该药物的总量$G(t)$的变化规律，并研究随着时间的增加，$G(t)$的变化趋势.

25. 一个由 n 个个体组成的群体受到一种罕见的传染病的侵袭. 在时刻 t，易感染个体数为 $x(t)$，流动着的感染个体数为 $y(t)$，被隔离、死亡或已免疫的个体数为 $z(t)$($n=x(t)+y(t)+z(t)$). 设初始值 $x(0)$比 $y(0)$和 $z(0)$大，这种传染病扩散的模型用方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = -\beta x(0)y \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta x(0)y - \gamma y \\ \dfrac{dz}{dt} = \gamma y\end{cases}$$

来表示(β，γ 为正常数).

a) 根据 $x(0)$和 $y(0)$求上述方程组的解；

b) 如果 $\beta x(0)<\gamma$，证明此种病将不会带来一场瘟疫；

c) 如果 $\beta x(0)>\gamma$，将带来什么结果？

习题 7 答案

1. (1) 二阶；
   (2) 三阶.
2. (1),(3) 特解.
   (2),(4) 既不是通解,也不是特解.
   (5),(6) 通解.
3. (1) $y=e^{Cx}$；
   (2) $\sin y=\ln|x+1|-x+C$；
   (3) $y^2+1=C(x^2-1)$；
   (4) $(1+x^2)(1+y^2)=Cx^2$,
   (5) $2y^3+3y^2=2x^3+3x^2+C$；
   (6) $\tan x\tan y=C$.
4. (1) $y=e^{\tan\frac{x}{2}}$；
   (2) $e^y=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}$；
   (3) $y=\frac{1}{1+\ln|x+1|}$；
   (4) $\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$.
5. (1) $\sin\frac{y}{x}=Cx$；
   (2) $x+y=\tan(x+C)$；
   (3) $xy=(x+C)^2$；
   (4) $(x-y)^2=-2x+C$.
6. (1) $y=e^{-\sin x}(x+C)$；
   (2) $y=\frac{1}{x}(e^x-e)$；
   (3) $y=\frac{C}{x}+\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{2}x+2$；
   (4) $y=\frac{e^x}{x}(e^x+C)$；
   (5) $y=x^n(e^x+C)$；
   (6) $s(t)=Ce^{-\sin t}+\sin t-1$；
   (7) $y=x\sec x$；
   (8) $y^2(x^2+1)+Cy^2e^{x^2}=1$；
   (9) $y^3=x^3(3x+C)$；

(10) $y\left(Cx^2+\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}\right)=1$.

7. (1) $y=-\frac{1}{6}x^3+C_1x+C_2$;

(2) $y=e^x+\cos x+C_1x^2+C_2x+C_3$;

(3) $y=C_1\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)+C_2$;

(4) $x=-2C_1\ln\cos\frac{t}{2}+C_2$;

(5) $y=\ln|x|+2$;

(6) $y=C_1e^x-\frac{1}{2}x^2-x+C_2$;

(7) $y=-\ln|1-x|$;

(8) $\sqrt{C_1y^2-a}=C_1(x+C_2)$;

(9) $y=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2$;

(10) $\cot y=-C_1^2x+C_2$;

(11) $y=\tan x$.

8. (1) $y=C_1+C_2e^{2x}$;

(2) $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$;

(3) $y=(C_1+C_2x)e^{\frac{1}{3}x}$;

(4) $y=2\cos x+\sin x$;

(5) $y=14e^{-x}-8e^{-3x}$;

(6) $y=C_1x^2+C_2x^3$;

(7) $y=C_1\cos\ln|x|+C_2\sin\ln|x|$.

9. (1) $\frac{s}{s+4}$;

(2) $\frac{2}{s^2}$;

(3) $\frac{2}{4s^2+1}$;

(4) $\frac{1}{s^2+4}$;

(5) $\frac{3}{s^2}-\frac{1}{(s-1)^2}$;

(6) $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$;

(7) $\frac{10-3s}{s^2+4}$;

(8) $\frac{1}{s}e^{-4s}-\frac{4}{s}e^{-2s}+\frac{3}{s}$.

10\. (1) $5e^{-3t}$;

(2) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{b-a}\left(\frac{e^{-bt}}{b}-\frac{e^{-at}}{a}\right)$;

(3) $4\cos 2t-\frac{3}{2}\sin 2t$;

(4) $\frac{1}{4}(e^{2t}-e^{-2t})$.

11\. (1) $y=e^{2x}-e^{-x}$;

(2) $y=\frac{1}{8}(3e^{t}-2e^{-t}-e^{-3t})$;

(3) $y=e^{-x}\sin x$;

(4) $y=(x-1)+(2x^2+x+1)e^{-2x}$.

12\. (1) $x=e^{t}, y=e^{-t}$;

(2) $\begin{cases} x=C_1\cos t+C_2\sin t, \\ y=-C_1\sin t+C_2\cos t; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=te^{3t}, \\ y=(1+t)e^{3t}; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=e^{t^2}, \\ y=2t. \end{cases}$

13\. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}$.

14\. $R=R_0e^{-0.0004t}$.

15\. $V=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$.

16\. 54 天，27 天.

17\. 2 h.

18\. $Q=\frac{k_1}{k_2}(1-e^{-k_2t})$.

19\. $x=x_0e^{r\sin t}$ （曲线略）.

20\. $P=\frac{b}{Ce^{-abv}+1}$.

21\. $\begin{cases} x(t)=50(3e^{t}-e^{3t}), \\ y(t)=50(3e^{t}+e^{3t}). \end{cases}$

22\. $n=0$, $C(t)=-kt+C_0$;

$n=1$, $C(t)=C_0e^{-kt}$;

$n=2$, $C(t)=\frac{C_0}{C_0kt+1}$.

23\. $y=\frac{k_1}{k_1+k_2}[1-e^{-(k_1+k_2)t}]$.

24\. $G(t)=\frac{I}{k}+\left[G(0)-\frac{I}{k}\right]e^{-kt}$.

25. $x(t)=\frac{-\beta x(0)y(0)}{\beta x(0)-\gamma}e^{[\beta x(0)-\gamma]t}+\frac{\beta x(0)y(0)}{\beta x(0)-\gamma}+x(0)$;

$y(t)=y(0)e^{[\beta x(0)-\gamma]t}$;

$z(t)=\frac{\gamma y(0)}{\beta x(0)-\gamma}e^{[\beta x(0)-\gamma]t}-\frac{\gamma y(0)}{\beta x(0)-\gamma}+z(0)$.

第 8 章

无穷级数

无穷级数的理论是在生产斗争和科学实验中形成和发展起来的. 它是描述函数、研究函数的性质以及进行数值计算的一种工具. 在微积分理论产生以前，无穷级数就有了广泛的应用. 我国古代数学家刘徽曾运用无穷级数的概念来计算圆的面积. 今天，无穷级数的理论与计算机技术结合在一起，已成为解决许多实际问题的有力工具. 本章先介绍常数项级数，然后讨论幂级数及其应用，最后介绍傅里叶级数.

8.1 常数项级数

8.1.1 常数项级数的基本概念

科赫雪花曲线是德国数学家科赫(H. Von Koch) 1904 年构造出来的. 取一个正三角形作为源多边形，取正三角形的一条边来构造科赫雪花生成元. 生成元的构造规则如图 8.1 所示：将图中线段 A 等分成 3 份，以中 1/3 为底边作一等边三角形，挖去中间一段，如图中折线 B 所示. 将折线 B 的每条边再分别分成 3 段，以中 1/3 为底作一等边三角形，并挖去中间的 1/3，则得图中的曲线 C.

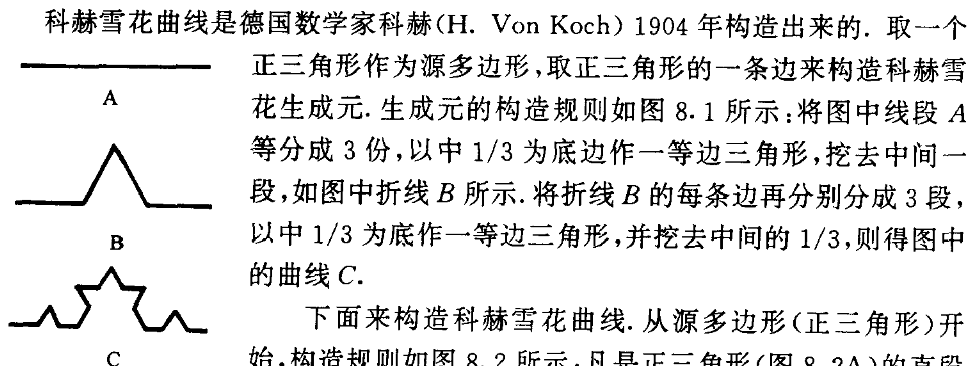


图 8.1

下面来构造科赫雪花曲线. 从源多边形(正三角形)开始，构造规则如图 8.2 所示：凡是正三角形(图 8.2A)的直段线段，均按科赫雪花生成元的形状变形，变形一次后形成图 8.2B，这是一个六角星；再将六角星中的每一条直线段按科赫雪花生成元的形状变形一次，形成图 8.2C，这是一个类似雪花的多刺形图形；如此变形下去，第三次形成图 8.2D，这是一朵美丽的雪花；第四次形成图 8.2E(放大 9 倍)，这是一朵更美丽的雪花；…….

假定正三角形的边长为 1m，问最终形成的科赫雪花曲线所围面积比正三角形的面积增加了多少？

首先考虑科赫雪花曲线上直线段长度的变化. 科赫雪花曲线每变形一次，变形后的科赫雪花曲线上直线段的长度就是变形前的直线段的长度的 1/3. 从图 8.2B 开始，直线段长度变化形成的无穷数列是

$$\frac{1}{3},\frac{1}{3^2},\cdots,\frac{1}{3^n},\cdots \tag{8.1}$$

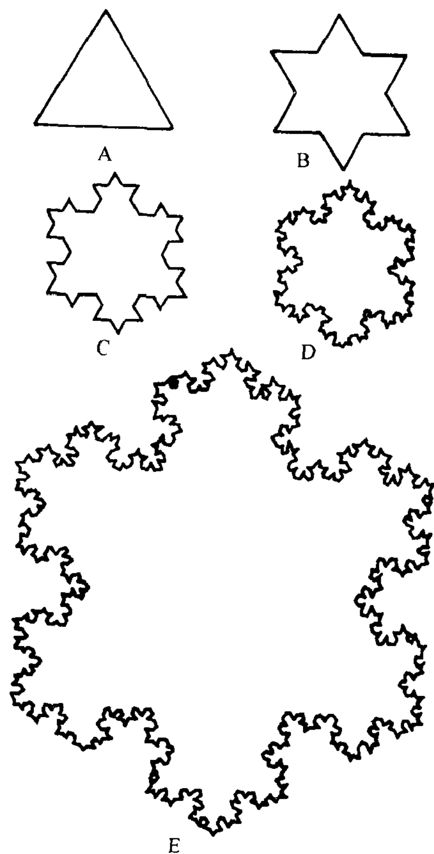


图 8.2

其次讨论科赫雪花曲线每变形一次后，增加的小正三角形个数的变化. 从图 8.2A 开始，变形后的科赫雪花曲线增加的小正三角形个数所形成的无穷数列，可以从图 8.1 直观看出，为

$$1\cdot 3,2^2\cdot 3,2^4\cdot 3,\cdots,2^{2(n-1)}\cdot 3,\cdots \tag{8.2}$$

下面可以从图 8.2B 开始，依次求出每次变形后，科赫雪花曲线所围面积的增量.

从直线段长度变化形成的数列(8.1)和增加的小正三角形个数形成的数列(8.2)，我们容易得到图 8.2B 比图 8.2A 增加的面积为

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\sin 60^{\circ}\right)\cdot 1\cdot 3=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4};$$

图 8.2C 比图 8.2B 增加的面积为

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\sin 60^{\circ}\right)\cdot 2^2\cdot 3=\frac{2^2}{3^3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4};$$

图 8.2D 比图 8.2C 增加的面积为

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\sin 60^{\circ}\right)\cdot 2^4\cdot 3=\frac{2^4}{3^5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4};$$

图 8.2E(缩小 9 倍)比图 8.2D 增加的面积为

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^4}\cdot\frac{1}{3^4}\cdot\sin 60^{\circ}\right)\cdot 2^6\cdot 3=\frac{2^6}{3^7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4};$$

第 n 次变形后比第 $n-1$ 次变形后增加的面积为

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n}\cdot\frac{1}{3^n}\cdot\sin 60^{\circ}\right)\cdot 2^{2(n-1)}\cdot 3=\frac{2^{2n-2}}{3^{2n-1}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4};$$

它们形成了如下的无穷数列

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4},\ \frac{2^2}{3^3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4},\ \frac{2^4}{3^5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4},\cdots,\frac{2^{2n-2}}{3^{2n-1}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4},\cdots \tag{8.3}$$

所以科赫雪花曲线所围面积与正三角形的面积相比较所增加的面积为

$$S=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{2^2}{3^3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+\cdots+\frac{2^{2n-2}}{3^{2n-1}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+\cdots$$

类似于这样无穷多个数依次相加的有趣的实际问题是很多的.将它们抽象出来,就得到无穷级数的一般概念.

定义 1 设给定一无穷数列

$$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$$

把它们各项依次无限累加,则式子

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

称为**无穷级数**(infinite series),简称**级数**,记为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots,$$

其中第 n 项 a_n 称为级数的**一般项**(general term)或**通项**.

例如把数列(8.1)的各项依次无限累加就是一个级数

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots,$$

简写为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$,通项为 $a_n=\frac{1}{3^n}$.其相邻两项之比是一常数 $\frac{1}{3}$.

具有类似性质(相邻两项之比是一常数)的级数称为**几何级数**(geometrical series)或**等比级数**.

将正偶数依次无限累加,所得结果也是一个级数

$$2+4+6+\cdots+2n+\cdots,$$

简写为$\sum_{n=1}^{\infty}2n$，通项为$a_n=2n$. 其相邻两项之差是一常数 2.

具有类似性质(相邻两项之差是一常数)的级数称为**算术级数**(arithmetic series)或**等差级数**.

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots$$

亦是级数，简写为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$，通项为$a_n=(-1)^{n+1}$. 其相邻两项的符号相反.

具有类似性质(相邻两项的符号相反)的级数称为**交错级数**(alternating series).

上面提到的 3 个级数的每一项都是常数，称为**常数项级数**. 后面还要讨论每一项都是函数的**级数**，称为**函数项级数**. 如

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots+\cos nx+\cdots$$

都是函数项级数. 前者叫**幂级数**(Power Series)，后者叫**三角级数**(trigonometric series).

先讨论常数项级数. 有限多个数相加，其和是常数. 而级数是无穷多个数相加，逐项依次相加是加不完的. 因此不能按普通求和来理解它，而必须明确它所包含的意义. 注意到级数是从有限项开始，不断递增，最后变成无穷项的. 说明级数的形成经历了一个从有限到无限的过程. 换言之，级数是从有限项累加(前 n 项的和为 S_n)经过极限过程($n\to\infty$)转化为无限项累加的. 下面以前面 3 个数项级数为例，根据此思想来讨论数项级数.

例 1　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots$

解　先求级数前 n 项的和 S_n

$$S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}.$$

当 $n\to\infty$时，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}.$$

把 S_n 的极限值$\frac{1}{2}$叫做级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$的“和”.

例 2　$\sum_{n=1}^{\infty}2n=2+4+\cdots+2n+\cdots$

解　先求级数前 n 项的和 S_n

$$S_n=2+4+\cdots+2n=n(n+1).$$

当 $n\to\infty$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}n(n+1)=+\infty.$$

称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}2n$ 没有“和”.

例 3 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}=1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots$

解 先求级数前 n 项的和 S_n

$$S_n=1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1}=\begin{cases}1, & n\text{ 为奇数},\\0, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{S_n\}$ 总是在 1 和 0 这两个数上跳来跳去，不会趋向于一个确定的常数. 在这种情况下，称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ 没有“和”.

从上面 3 个例题的讨论可知，级数的各项无限累加的结果有 3 种情况：① 级数的前 n 项之和 S_n 随 $n\to\infty$ 而趋向于一个确定的常数 S，把这个常数 S 叫做级数的“和”. ② 级数的前 n 项之和 S_n 随 $n\to\infty$ 而趋于 ∞，称这类级数没有“和”. ③ 级数的前 n 项之和 S_n 当 $n\to\infty$ 时不趋于一个确定的数，称这类级数也没有“和”. 于是引出级数收敛的定义.

定义 2 设有无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots,$$

它的前 n 项的和为

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

称 S_n 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的**部分和**(partial sum). 如果 $n\to\infty$ 时，部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限 S，即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,$$

则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **收敛**(convergence)，S 称为级数的和，记为

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots.$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在(无穷或不定)，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **发散**(divergence).

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是否收敛取决于其部分和数列 $\{S_n\}$ 的极限是否存在.

当级数收敛时，称

$$R_n=S-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots$$

为级数的**余项**. 显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$.

由定义 2 可知，上面讨论的 3 个级数中 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}2n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ 均发散.

例 4　求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 的和.

解　此级数前 n 项的和为

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 的和 $S=1$.

例 5　讨论几何级数(等比级数) $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}(a\neq 0)$ 的敛散性.

解　此级数前 n 项的和为

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\qquad(|r|\neq 1).$$

1) 当 $|r|<1$ 时

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r},$$

故级数收敛，其和 $S=\frac{a}{1-r}$.

2) 当 $|r|>1$ 时

$$\lim_{n\to\infty}r^n=\infty,$$

于是有 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\infty$，故级数发散.

3) 当 $|r|=1$ 时，级数发散，请读者验证.

综上所述：**当 $|r|\geqslant 1$ 时，几何级数发散；当 $|r|<1$ 时，几何级数收敛.**

例 6　求无穷数列(8.3)形成的级数之和.

解　此级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2^{2n-2}}{3^{2n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^{n-1}.$$

它是一个几何级数，$r=\left(\frac{2}{3}\right)^2<1$，故级数收敛. 又 $a=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$，所以其和

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

至此，解决了本节开头提出的问题，科赫雪花曲线所围面积比正三角形的面积增加了$\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{m}^2$. 而正三角形的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{m}^2$，故科赫雪花曲线所围面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{8}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{m}^2$.

一般地，科赫雪花曲线所围面积是源多边形(即正三角形)面积的 8/5 倍.

8.1.2 无穷级数的基本性质

从无穷级数的敛散性定义可以看出，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是否收敛取决于其部分和数列 $\{S_n\}$ 的极限是否存在. 因此，级数的问题原则上都可以转化为数列的问题来研究. 但由于级数采用了“无穷项相加”这一新的形式，因而它也就有某些引人注目的特殊的规律. 把它归结为如下一系列基本性质.

性质 1 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛于 S，k 是任意常数，则 $\sum_{n=1}^{\infty}ka_n$ 也收敛，其和为 kS.

性质 2 设两个级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 也收敛，且下式成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

本性质表明：对于收敛级数来说，和或差所成的级数等于级数的和或差.

性质 3 在级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 前面加上或去掉有限项，不影响级数的敛散性. 当级数收敛时，其和要改变.

性质 4 收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 加括弧后形成的级数必定收敛，而且收敛于原级数的和 S.

但是，发散级数加括弧后形成的级数却不一定发散.

考查前面例 3 提到的发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$，若按如下规律加括弧

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

所形成的级数显然收敛于零.

由此可得如下推论：

推论 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 加括弧后形成的级数发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 一定发散.

换言之，加括弧后形成的级数收敛，但原级数却不一定收敛.

性质 5（收敛的必要条件）　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则必有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

本性质可以用来判定级数发散：如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的一般项 a_n 不趋于零，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必发散.

例如前面例 5 讨论过的几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \quad (a \neq 0)$$

的一般项 $a_n = ar^{n-1}$. 如果 $|r| \geqslant 1$，当 $n \to \infty$ 时，a_n 不趋于零，故此时级数是发散的.

例 7　讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + (-1) + \frac{1}{3^2} + (-1) + \frac{1}{5^2} + (-1) + \cdots$$

的敛散性.

解　考查加括弧后形成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = (1-1) + \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) + \left(\frac{1}{5^2} - 1\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - 1\right) + \cdots.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^2} - 1\right) = -1 \neq 0,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

根据上述推论，去括弧后的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

但级数的一般项趋于零，即 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 并不是级数收敛的充分条件. 有些级数的一般项虽然趋于零（$n \to \infty$），但它们是发散的.

如**调和级数**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

的一般项满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

可以证明调和级数是发散的.

把调和级数以两项、两项、四项、八项、…的方式加上括弧

$$\left(1+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}\right) + \cdots$$

注意到　$$1+\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

……

$$\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}$$

$$>\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}=\frac{1}{2}$$

因此加上括弧后形成的级数前$(m+1)$项的和大于$(m+1)\frac{1}{2}$，从而这个级数发散. 根据性质 4 的推论可知调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的.

8.1.3 正项级数及其收敛判别法

所谓正项级数，就是每项都是非负数的级数. 正项级数不但简单而且重要，在研究其他种类的级数时，经常要用到正项级数的有关结论.

研究一个级数，首先要讨论两个问题：① 它是否收敛，也就是敛散性问题；② 如果收敛，它的和是什么？显然，讨论①比讨论②更为重要. 因为，如果级数发散，问题②就不存在；如果级数收敛，即使还不知道它的和 S，也可以用它的部分和 S_n 去逼近它，并且由于收敛级数余项 R_n 的极限为零，用 S_n 去逼近 S 可以达到任意的精确度. 因此，重点讨论级数的敛散性问题. 而许多级数的敛散性问题又可以归结为正项级数的敛散性问题，于是，先讨论正项级数的情形.

定义 3 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的各项全非负数，即 $a_n\geqslant 0(n=1,2,3,\cdots)$，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为**正项级数**.

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{n}a_n$ 的部分和为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

注意到 $a_n\geqslant 0(n=1,2,3,\cdots)$，$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}\geqslant S_n$. 所以正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调增加数列，于是有如下结论：

1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$，则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n\leqslant M$（$M$ 是正实数），则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

一般来说，求 S_n 的极限或判别 S_n 是否有界并不很容易，因此通常不直接应用上述结论来判定正项级数的敛散性，而应用下述几个行之有效的判别法.

定理 1(比较判别法)　设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$，且当 $n>N$ 时(N 为正整数)，恒有

$$a_n\leqslant b_n$$

则　1）当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

2）当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 也发散.

例 8　讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

的敛散性.

解　当 $n>3$ 时，$n!>2^n$，即 $\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^n}$. 据例 5 知道几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，据定理 1 可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛.

为了应用的方便，给出正项级数的一个重要性质：**收敛的正项级数去掉括弧后形成的正项级数亦收敛**.

例 9　试证 **p 级数**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

当 $p\leqslant1$ 时发散；当 $p>1$ 时收敛.

证　(a) 当 $p\leqslant0$ 时，由于一般项 $\frac{1}{n^p}$ 不趋于零，级数发散.

(b) 当 $0<p\leqslant1$ 时，有

$$\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{n^p}\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，据定理 1 知此时级数发散.

所以当 $p\leqslant1$ 时，级数发散.

(c) 当 $p>1$ 时，依次把 p 级数的一项、两项、四项、八项、……括在一起，得到级数

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{15^p}\right)+\cdots\tag{8.4}$$

它的各项显然小于下面级数对应的项

$$\begin{aligned}&1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{8^p}\right)+\cdots\\&=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3+\cdots\end{aligned}$$

这是一个几何级数，其公比 $r=\frac{1}{2^{p-1}}<1$，故是收敛的. 于是当 $p>1$ 时，级数(8.4)收敛，而收敛的正项级数去掉括弧后形成的正项级数亦收敛，所以此时 p 级数收敛.

由此很容易判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ 皆收敛,而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散.

例 10 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 的敛散性.

解 因为 $n(n+1)<(n+1)^2$,所以 $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\frac{1}{n+1}$,而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}+\cdots$$

是发散的,据定理 1 知所给级数是发散的.

综上所述,使用比较判别法(定理 1)常用的比较级数是几何级数、调和级数和 p 级数.

可否由级数本身来判别其敛散性呢?有下面两个在实用上非常方便的判别法(比值法和根值法).

定理 2(比值判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数($a_n>0$),且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho,$$

则 1) 当 $\rho<1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

2) 当 $\rho>1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散;

3) 当 $\rho=1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 可能收敛也可能发散.

这个方法又称为达朗贝尔判别法.

例 11 判定 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛.

例 12 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$ 的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}}{\frac{n!}{10^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty,$$

所以由定理 2(2)知级数发散.

从例 11 和例 12 可以看到,如果正项级数的一般项中出现关于阶乘或方次的

分式时，可尝试用比值判别法.

定理 3(根值判别法)　设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=r,$$

则　1）当 $r<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

2）当 $r>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散；

3）当 $r=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 可能收敛也可能发散.

这个方法又称为柯西判别法.

例 13　判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 的敛散性.

解　因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{\mathrm{e}}<1,$$

所以由定理 3(1)知级数收敛.

显然，当正项级数的一般项为 n 次方的形式时，用根值判别法较方便.

下面介绍比较判别法的一个推论，有时在实用上更为方便.

推论　设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l,\quad (0<l<+\infty),$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 有相同的敛散性.

例 14　讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ 的敛散性.

解　显然级数是正项级数，$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}>0$，取 $b_n=\frac{1}{n}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 为调和级数. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1,$$

而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，据推论知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散.

此题用上述 3 个定理均不能判别其敛散性，请读者验证.

8.1.4 任意项级数及其收敛判别法

上面讨论的是各项符号恒正的级数，下面考查各项符号不完全相同的变号级数，其敛散性的讨论显然会更困难一些. 首先讨论变号级数中一种符号正负相间的特殊情形，由此引出交错级数的定义.

定义 4 形如

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \cdots$$

其中 $a_n \geqslant 0(n=1,2\cdots)$的级数叫做**交错级数**(alternating series).

定理 4(交错级数收敛判别法) 若交错级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \quad (a_n \geqslant 0, n = 1,2,\cdots) \text{ 满足条件}$$

1) $a_n \geqslant a_{n+1}$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

则级数收敛，其和 $S \leqslant a_1$，余项 R_n 满足 $|R_n| \leqslant a_{n+1}$.

这个方法又称为莱布尼兹判别法.

例 15 判别级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots$$

的敛散性.

解 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ 是交错级数，满足条件

(a) $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \quad (n=1,2,\cdots)$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$,

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ 收敛，其和 $S \leqslant 1$. 若取前 9 项之和作为该级数的近似值，即

$$S_9 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{8}+\frac{1}{9},$$

则绝对误差

$$|S-S_9| = |R_9| \leqslant \frac{1}{9+1} = 0.1.$$

例 16 判别交错级数

$$\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{\ln n} + \cdots$$

的敛散性.

解 因为 (1) $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{\ln(n+1)} \quad (n=2,3,\cdots)$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0$,

所以级数收敛,其和 $S\leqslant\frac{1}{\ln 2}$.

现在讨论正负项可以任意出现的更一般的级数.设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是任意项级数,把它的通项 a_n 换成 $|a_n|$ 就形成了一个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$.对于正项级数,已给出了几个敛散性的判别法,能否利用它们来判别任意项级数的敛散性问题呢?为此,先考查下面两个例子.

例 17　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ 的收敛性.

解　因为　(a) $\frac{1}{n^2}>\frac{1}{(n+1)^2}\quad(n=1,2,\cdots)$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$,

据定理 4 知级数收敛.

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$,据例 9 知它也收敛.

例 18　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ 的收敛性.

解　由例 15 知它是收敛的,但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是调和级数,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的.

由上面讨论可知,当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 可能收敛也可能发散.由此引出绝对收敛与条件收敛的定义.

定义 5　设任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,

1) 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ **绝对收敛**;

2) 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ **条件收敛**.

由定义 5 知,例 17 中的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^2}$ 绝对收敛,而例 18 中的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$ 是条件收敛的.

由此引出绝对收敛和条件收敛间有如下重要关系:

定理 5　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 必定收敛.反之不一定成立.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，令

$$b_n=\frac{1}{2}(|a_n|+a_n)\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

显然 $b_n\geqslant 0$ 且 $b_n\leqslant|a_n|$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的各项均小于 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 的对应项. 由定理 1 知，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}2b_n$ 亦收敛. 注意到

$$a_n=2b_n-|a_n|,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是由两个收敛级数逐项相减后形成的，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(2b_n-|a_n|).$$

由性质 2 知 $\sum_{n=1}^{\infty}(2b_n-|a_n|)$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

但反之不真，即 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，不一定 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛. 例 18 就说明了该问题.

这个定理的有用之处在于，它使得许多任意项级数收敛性的判别问题可以转化为正项级数收敛性的判别问题.

根据定理 5，判别任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是否收敛，可以先判别正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 是否收敛. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 必收敛；如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，就只能寻求其他方法来判别 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是否收敛了.

例 19 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ 的敛散性.

解 级数的一般项 $a_n=\frac{\cos nx}{n^2}$，而

$$|a_n|=\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}.$$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛(见例 9)，由定理 1 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|$ 收敛，据定理 5 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ 收敛.

例 20 讨论级数

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+\cdots$$

的敛散性.

解　$a_n=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{x^n}{n}$，$|a_n|=\dfrac{|x|^n}{n}$，考查级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x|^n}{n}$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{|x|^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{|x|^n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot|x|=|x|,$$

(a) 当 $|x|<1$ 时，由定理 2 知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x|}{n}$ 收敛，所以此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{x^n}{n}$ 绝对收敛；

(b) 当 $|x|>1$ 时，级数的一般项 a_n 不趋于零($n\to\infty$)，级数发散；

(c) 当 $x=1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{n}$，收敛；

(d) 当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)\cdot\dfrac{1}{n}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，由调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散知所给级数发散.

综上所述，当 $-1<x\leqslant1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{x^n}{n}$ 收敛；当 x 取其他值时级数发散.

思考题

1. 从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ka_n$ 也收敛可否推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ka_n$ 也发散？

2. 从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 也收敛可否推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 也发散？

3. 收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 加上有限项后也收敛，是否有发散级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 加上无限项后也发散？

4. 收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 加括弧后形成的级数也收敛，是否有发散级数加括弧后形成的级数也发散？

5. 从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 可否推出 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛？

6. 从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛可否推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛？

7. 设正三角形边长为 1m，算出最终形成的科赫雪花曲线的周长及所围面积. 从中你可得到什么启示？

思考题解答

1. 分别考虑 $k=0$ 和 $k\neq 0$ 两种情况. 答案:否.

2. 考查级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$. 答案:否.

3. 考查 $\sum_{n=1}^{\infty}1/n$,其偶数项均加上该项的 -2 倍,所得级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$. 答案:否.

4. 考查级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$. 答案:否.

5. 考查级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. 答案:否.

6. 考查级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$. 答案:否.

7. 由例 6 知科赫雪花曲线所围面积为 $\frac{2}{5}\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$. 由(8.1)及(8.2)易知科赫雪花曲线的周长为下面无穷级数的和

$$3+1\cdot 3\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot 3\cdot\frac{1}{3^2}+2^4\cdot 3\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots+2^{2n-2}\cdot 3\cdot\frac{1}{3^n}+\cdots$$

$$=3+\left(1+2^2\cdot\frac{1}{3}+2^4\cdot\frac{1}{3^2}+\cdots+2^{2n-2}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}+\cdots\right)$$

其部分和 $S_n=3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n\to+\infty$.

我们得到一个经典几何学无法解释的奇怪结果:曲线的周长趋于无穷大,但曲线所围面积却趋于有限值 $\frac{2}{5}\cdot\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$. 把这种结构称为**分形结构**. 感兴趣的读者可参阅关于**分形**(fractal)方面的文献.

人体的循环系统是分形结构. 在人体的大多数组织中,没有一个细胞与血管相距超过 4 个细胞,可是血管与血液只占极少的空间,不超过身体的 5%,可见循环系统必须把巨大的面积挤入有限的体积之中. 人肺全部肺泡的表面积大于一片网球场的面积,肺里面还包含复杂的气道及动静脉网,可见人肺是分形结构.

8.2 幂 级 数

在医药学研究中,遇到一个比较复杂的函数时,常用的方法是设法把它展开成无穷级数,然后利用无穷级数的部分和去近似地代替它. 最常用到的无穷级数有两种类型:一是幂级数;一是傅里叶级数. 本节讨论幂级数,傅里叶级数将在 8.4 节讨论.

8.2.1　函数项级数的基本概念

上节讨论了常数项级数，现在讨论级数的每一项都是某一个变量的函数的情况，为此引出函数项级数的定义.

定义 1　设给定一定义在区间$[a,b]$上的函数列

$$a_1(x), a_2(x), \cdots, a_n(x), \cdots$$

把它的各项依次无限累加，则表达式

$$a_1(x)+a_2(x)+\cdots+a_n(x)+\cdots$$

就称为**函数项无穷级数**，简称**函数项级数**. 记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x).$$

对于每一个定点 $x_0 \in [a,b]$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 就变成了一个常数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0) = a_1(x_0) + a_2(x_0) + \cdots + a_n(x_0) + \cdots.$$

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ 收敛，称 x_0 是函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的**收敛点**；如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ 发散，称 x_0 是函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的**发散点**.

收敛点的全体称为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的**收敛域**；发散点的全体称为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的**发散域**.

对应于收敛域内任意一点 x，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 成为一个收敛的常数项级数，从而有一个确定的和 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$，因此 $S(x)$ 是定义在收敛域上的函数. 把 $S(x)$ 叫做函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的**和函数**.

类似于讨论常数项级数，把函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的前 n 项的和记作 $S_n(x)$，即

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) = a_1(x) + a_2(x) + \cdots + a_n(x),$$

于是在收敛域上有

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x).$$

称 $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的**余项**（注意只有在收敛域内 $R_n(x)$ 才有意义），于是有

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

例 1 几何级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

是其各项均定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数项级数. 当$|x|<1$时收敛,$|x|\geqslant 1$时发散. 故它的收敛域是$(-1,1)$,和函数$S(x)=\frac{1}{1-x}$. 当$x\in(-1,1)$时,易求出$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{1-x}$,于是有$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{1-x}=0$.

8.2.2 幂级数的收敛性及运算

例 1 提到的几何级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$的各项都是最简单的幂函数,它的收敛域特别规则,它的部分和是多项式,运算起来也非常方便. 具有这些良好性质的级数就是将要讨论的幂级数.

幂级数(power series)的一般形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots.$$

在上式中令$x-x_0=t$,得

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + \cdots.$$

不失一般性,为方便起见,只讨论如下形式的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \tag{8.5}$$

其中$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$均为实数,叫做幂级数的系数.

幂级数(8.5)的收敛区域具有非常简单的形状,它们均是以坐标原点为中心的区间.

性质 1 对于幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,存在一个非负数$R$,

1) 如果$0<R<+\infty$,则当$|x|<R$时,幂级数绝对收敛;当$|x|>R$时,幂级数发散;当$x=\pm R$时,幂级数可能收敛也可能发散.

2) 如果$R=+\infty$,则幂级数在$(-\infty,+\infty)$内收敛.

3) 如果$R=0$,则幂级数仅在$x=0$收敛.

把R称为幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的**收敛半径**(convergence radius). 对于(8.5),由幂级数在$x=\pm R$处的敛散性就可以确定它在区间$[-R,R]$,$[-R,R)$,$(-R,R]$或$(-R,R)$上收敛,这个区间叫做**幂级数**$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的**收敛区间**.

下面讨论幂级数的收敛半径R的实际求法.

定理 1　对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，如果相邻两项的系数 a_n, a_{n+1} 满足

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho,$$

若　1）$\rho \neq 0$，则 $R = \frac{1}{\rho}$；

2）$\rho = 0$ 则，$R = +\infty$；

3）$\rho = +\infty$，则 $R = 0$.

例 2　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n!}}$ 的收敛半径和收敛区间.

解　$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{(n+1)!}}}{\frac{1}{\sqrt{n!}}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n+1}} = 0,$

所以收敛半径 $R = +\infty$，收敛区间是 $(-\infty, +\infty)$.

例 3　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ 的收敛半径和收敛区间.

解　$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1,$

所以收敛半径 $R=1/\rho=1$.

当 $x=1$ 时，级数为 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$，该级数为交错级数，据上节例 15 知它收敛.

当 $x=-1$ 时，级数为 $-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\cdots$，它是调和级数，发散.

故幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ 的收敛区间是 $(-1,1]$.

例 4　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$ 的收敛半径.

解　$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = +\infty,$

所以收敛半径 $R = 0$，幂级数仅在 $x = 0$ 收敛.

性质 2　设幂级数 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R(R>0)$，则在收敛区间内

1）和函数 $S(x)$ 是连续函数.

2）幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 可以**逐项微分**

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

所得级数的收敛半径也是 R.

3）幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 可以**逐项积分**

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

所得级数的收敛半径也是 R.

例 5 由例 1 已知 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛半径为 $R=1$，在收敛区间 $(-1,1)$ 内有

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,$$

由性质 2(2)可得

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots,$$

其收敛半径也是 $R=1$.

由性质 2(3)则得

$$-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots,$$

其收敛半径亦是 $R=1$.

由此推得，当 $-1<x<1$ 时有如下关系式

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}-\cdots.$$

性质 2 解决了幂级数的分析运算(即逐项微分与积分)问题，下面讨论常用的关于幂级数相加、相减与相乘的问题.

设有收敛半径分别为 R_1 和 R_2 的两幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots,$$

记 $R=\min(R_1,R_2)$，则在区间 $(-R,R)$ 内，两幂级数可以**逐项相加、相减或相乘**. 即

$$f(x)\pm g(x)=(a_0\pm b_0)+(a_1\pm b_1)x+\cdots+(a_n\pm b_n)x^n+\cdots, \quad (8.6)$$

$$\begin{aligned} f(x)\cdot g(x)= & a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x \\ & +(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots \\ & +(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n+\cdots. \end{aligned} \quad (8.7)$$

式 8.6 和 8.7 在下面函数的幂级数展开及幂级数的应用中有用.

8.2.3 函数的幂级数展开式

上面讨论的主题是：已知一个幂级数，怎样确定它的收敛区间？其和函数 $S(x)$ 在该区间上有哪些性质？但医药学中的问题却是相反的问题，即在研究某个课题时得到一个函数 $f(x)$，我们想知道这个函数是否可以在某个给定的区间上展开为 x 的幂级数，从而有利于我们解决该课题. 换言之，是否可以把 $f(x)$ 写成如下形式

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots.$$

若可以，系数 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 如何确定？如果这两个问题的答案是肯定的，就可以用多项式 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 来近似地表示复杂的函数 $f(x)$ 而达到任意高的精确度.

(1) 泰勒级数(taylor series)

定理 2(泰勒定理)　若函数 $f(x)$ 在含有点 x_0 的开区间 (a,b) 内有直到 $(n+1)$ 阶导数，则当 $x\in(a,b)$ 时，

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), \tag{8.8}$$

其中 $R_n(x)$ 为拉格朗日余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

ξ 是 x 与 x_0 之间的某个数.

式(8.8)称为 ***n* 阶泰勒公式**.

在 n 阶泰勒公式(8.8)中令 $n\to\infty$，若余项 $R_n(x)\to 0$，式(8.8)就演变为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots. \tag{8.9}$$

式(8.9)叫做 $f(x)$ 的**幂级数展开式**.

式(8.9)右边的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{8.10}$$

叫做 $f(x)$ 的**泰勒级数**.

可以证明：若函数 $f(x)$ 在含有点 x_0 的开区间 (a,b) 内的任意阶导数存在，则式(8.9)成立的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

还可以证明：若 $f(x)$ 能展开为 $(x-x_0)$ 的幂级数，即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

则必有

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

综上所述：如果 $f(x)$ 在包含 x_0 的区间 (a,b) 上能展开成 $(x-x_0)$ 的幂级数，则该幂级数必定是泰勒级数，即 $f(x)$ 的幂级数展开式是惟一的. 从而提示可以用任何方式求 $f(x)$ 的幂级数展开式.

在 n 阶泰勒公式(8.8)中令 $x_0=0$，就得到 ***n* 阶麦克劳林公式**

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),\quad(8.11)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$，$\xi$ 是 x 与 0 之间的某个数.

在 $f(x)$ 的泰勒级数(8.10)中令 $x_0=0$，就得到 $f(x)$ 的**麦克劳林级数**(maclaurin series).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.\quad(8.12)$$

(2) 初等函数的幂级数展开式

1) 直接法　要把已知函数 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，可以直接按照下列步骤进行(展开为 $x-x_0$ 的幂级数与之相似).

第一步　求出 $f(x)$在 $x=0$ 处的各阶导数值 $f^{(n)}(0)$，即求

$$f(0),f'(0),\cdots,f^{(n)}(0),\cdots$$

如果上述某个导数值不存在，就停止计算. 表示 $f(x)$不能展开为 x 的幂级数. 例如在点 $x=0$ 处，$f(x)=x^{\frac{5}{2}}$的三阶导数值 $f'''(0)$不存在，它就不能展开为 x 的幂级数.

第二步　求出 $f(x)$的麦克劳林级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

的收敛半径 R.

第三步　考查当 $n\to\infty$时，余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

的极限是否趋于零. 其中 $x\in(-R,R)$，ξ 在 0 与 x 之间.

如果极限$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，则 $f(x)$就可以在区间$(-R,R)$上展开成 x 的幂级数，即 $f(x)$的幂级数展开式为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,x\in(-R,R).$$

例 6　求指数函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 的幂级数展开式.

解　(a)　$f(x)=\mathrm{e}^x$ 的各阶导数为

$$f(x)=f'(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=\cdots=\mathrm{e}^x,$$

把 $x=0$ 代入得 e^x 在 0 处的各阶导数值为

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=\cdots=1.$$

(b)　$f(x)=\mathrm{e}^x$ 的麦克劳林级数为

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

据定理 1 知，它的收敛半径 $R=+\infty$.

(c)　对任意给定的数 x，ξ(ξ 在 0 与 x 之间)，余项的绝对值为

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\mathrm{e}^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

因 $|x|$ 是有限值，$e^{|x|}$ 亦是有限值，故 $n\to\infty$ 时 $|R_n(x)|\to 0$. 所以 e^x 的幂级数展开式为

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

例 7　求正弦函数 $f(x)=\sin x$ 的幂级数展开式.

解　(a) $f(x)=\sin x$ 的各阶导数为

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

把 $x=0$ 代入得 $\sin x$ 在 0 处的各阶导数值为

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=-1$$
$$f^{(4)}(0)=0,\quad f^{(5)}(0)=1,\quad f^{(6)}(0)=0,\quad f^{(7)}(0)=-1,\cdots$$

(b) $f(x)=\sin x$ 的麦克劳林级数为

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,$$

据定理 1 易知它的收敛半径 $R=+\infty$.

(c) 对任意给定的数 x,ξ(ξ 在 0 和 x 之间)，余项的绝对值为

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\sin\left[\xi+(n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right]}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

$|x|$ 是有限值，当 $n\to\infty$ 时，$|R_n(x)|\to 0$. 所以 $\sin x$ 的幂级数展开式为

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

2) 间接法　对于一个给定的函数 $f(x)$，已知 $f(x)$ 只存在一个麦克劳林级数，所以可用任何正确的方法得到它. 从上面的例题可以看出，采用直接法时，大部分工作用于讨论余项 $R_n(x)$ 是否趋于零. 除了一些简单的函数外，这不是一件容易的事. 而利用幂级数的四则运算和逐项微分或积分等性质，可以避免讨论余项 $R_n(x)$，求出所给函数的幂级数展开式. 实际应用时，选择什么样的途径，应对具体问题作具体分析. 一般来说，主要是下面的几种方法：

① 代入法

例 8　求 $\sin 3x$ 的幂级数展开式.

解　由例 7 知 $\sin x$ 的幂级数展开式为

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

在上式中以 $3x$ 代 x，得 $\sin 3x$ 的幂级数展开式为

$$\begin{aligned}\sin 3x&=3x-\frac{(3x)^3}{3!}+\frac{(3x)^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\\&=3x-\frac{3^3}{3!}x^3+\frac{3^5}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots,\\&\qquad x\in(-\infty,+\infty).\end{aligned}$$

② 逐项微分、逐项积分法

例 9 求 $\cos x$ 的幂级数展开式.

解 对 $\sin x$ 的展开式在收敛区间$(-\infty,+\infty)$内使用逐项微分法，就得到 $\cos x$ 的展开式为

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

例 10 求 $f(x)=\ln(1+x)$的幂级数展开式.

解 因为

$$f'(x)=[\ln(1+x)]'=\frac{1}{1+x},$$

又 $\frac{1}{1+x}$是收敛的几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(-1<x<1)$ 的和函数：

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots,\qquad x\in(-1,1),$$

所以把上式从 0 到 x 逐项积分得

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots,\qquad x\in(-1,1).$$

上式对 $x=1$ 也是成立的，于是有

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}+\cdots.$$

③ 幂级数运算法

例 11 求 $e^x\cdot\sin x$ 的幂级数展开式.

解
$$\begin{aligned}e^x\cdot\sin x&=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)\\&=x+x^2+\left(\frac{x^3}{2!}-\frac{x^3}{3!}\right)+\left(\frac{x^4}{3!}-\frac{x^4}{3!}\right)+\cdots\\&=x+x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty).\end{aligned}$$

例 12 求 $\cos^2 x$ 的幂级数展开式.

解 此题可以利用例 11 的方法求得，但这样处理较烦，可以先把 $\cos^2 x$ 变形为

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x,$$

因为

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\qquad x\in(-\infty,+\infty),$$

所以

$$\cos 2x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!},\qquad x\in(-\infty,+\infty),$$

故

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!},\qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

④ 待定系数法

例 13　求 $\tan x$ 的幂级数展开式.

解　设 $\tan x$ 的展开式为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，由 $\sin x = \cos x \cdot \tan x$ 得

$$\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots.$$

利用式(8.7)乘开左端，然后比较两端系数得

$$a_0=0;a_1=1;a_2=0;$$

$$a_3-\frac{1}{2!}a_1=-\frac{1}{3!},a_3=\frac{1}{3};a_4=0;$$

$$a_5-\frac{1}{2!}a_3+\frac{1}{4!}a_1=\frac{1}{5!},a_5=\frac{2}{15};$$

$$\cdots\cdots$$

所以

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\cdots.$$

例 14　把 $f(x)=\ln x$ 展开为 $x-2$ 的幂级数.

上面的例子都是在 $x=0$ 处展开的，现在要求在 $x=2$ 处展开，当然可以按公式(8.9)展开，但这样做太繁，为简便起见，令 $t=x-2$，于是把问题转化为求 $\ln x=\ln(2+t)$ 在 $t=0$ 处的展开式. 据例 10 得

$$\begin{aligned}\ln(2+t)&=\ln2\left(1+\frac{t}{2}\right)=\ln2+\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)\\&=\ln2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{t}{2}\right)^n\\&=\ln2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n\cdot2^n}\cdot t^n,\quad(-2<t\leqslant2).\end{aligned}$$

用 $x-2$ 替换 t，即得所求的幂级数为

$$\ln x=\ln2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n\cdot2^n}\cdot(x-2)^n,\quad(0<x\leqslant4).$$

例 15　把函数 $\sin x$ 展为 $x-\frac{\pi}{4}$ 的幂级数.

解　$\sin x=\sin\left[\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$，

而

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

故 $\sin x$ 展为 $x-\frac{\pi}{4}$ 的幂级数是

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right],\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

从例 8 到例 15 可以看出，间接法要用到已知函数的幂级数展开式，所以读者应熟悉下面几个**常用函数的幂级数展开式及收敛区间**.

1° $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\qquad |x|<1;$

2° $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\qquad |x|<+\infty;$

3° $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\qquad |x|<+\infty;$

4° $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\qquad |x|<+\infty;$

5° $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\qquad -1<x\leqslant 1;$

6° $(1+x)^a=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n,\qquad |x|<1$

其中右边的幂级数在收敛区间端点 $x=\pm 1$ 上的敛散情况与 a 有关，因此，在端点处要根据 a 值具体讨论. 例如，当 a 依次取 $-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$ 时，有

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots\qquad(-1<x<1),$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots\qquad(-1\leqslant x\leqslant 1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots\qquad(-1<x\leqslant 1).$$

公式 6°叫做**牛顿二项式定理**.

思考题

1. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R=+\infty$，则对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 均收敛. 由此推断：若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径 $R=0$，则对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ 均发散，对吗？

2. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 是由特殊的函数族 $\{1,x,x^2,\cdots\}$ 构成的，所以任何幂函数 x^a 一定能展开成形如 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的幂级数，对吗？

思考题解答

1. 不对. 当 $x=0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 收敛.
2. 不对. 当 α 不等于正整数时，x^{α} 在 0 点的某阶导数值将不存在.

8.3　幂级数的应用

8.3.1　计算函数的近似值

有了函数的幂级数展开式，在展开式的收敛区间上，函数值就可利用这个级数按精确度要求计算出来，所产生的误差由余项来估计. 电子计算机就是采用这个方法计算函数值的. 我们用的对数表、三角函数等均是这样计算出来的.

例 1　试计算 e 的近似值，精确到小数点后第 4 位.

解　函数 e^x 的幂级数展开式为

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

令 $x=1$ 有

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

若取前 $n+1$ 项的和作为 e 的近似值，则误差

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \\ &= \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\right] \\ &< \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}\right] \\ &= \frac{1}{n \cdot n!}. \end{aligned}$$

要求 e 的近似值精确到小数点后第 4 位，需误差 $R_{n+1} < 10^{-4}$. 经试算得 $R_8 < \frac{1}{7 \cdot 7!} < 10^{-4}$，而 $\frac{1}{6 \cdot 6!} > 10^{-4}$. 于是

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{7!}.$$

经计算得 $e \approx 2.71826$.

例 2　试计算 ln2 的近似值，精确到 10^{-4}.

解 函数 $\ln(1+x)$的幂级数展开式为

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots \quad (-1<x\leqslant 1),$$

令 $x=1$ 得

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots.$$

这是一个交错级数，$|R_n|\leqslant\frac{1}{n+1}$. 为满足题意要求，需 $\frac{1}{n+1}\leqslant 10^{-4}$，即需要取级数的前一万项来计算. 这在实际计算中是行不通的. 因此需寻求收敛得快的级数来替换它.

把 $\ln(1+x)$中的 x 换为 $-x$，得

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots \qquad (-1\leqslant x<1),$$

用 $\ln(1+x)$减去 $\ln(1-x)$，得

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$$

$$=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right) \qquad (-1<x<1),$$

令$\frac{1+x}{1-x}=2$，得 $x-\frac{1}{3}$，代入上式得

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\cdots\right).$$

若取前 4 项的和作为 $\ln 2$ 的近似值，则误差

$$|R_4|=2\left(\frac{1}{9\cdot 3^9}+\frac{1}{11\cdot 3^{11}}+\cdots\right)$$

$$<\frac{2}{3^9}\left[\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{9}\right)^3+\cdots\right]$$

$$=\frac{2}{3^9}\left[\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}\right]$$

$$=\frac{1}{4\cdot 3^9}=\frac{1}{78732}<2\times 10^{-5}.$$

即截断误差小于 2×10^{-5}. 在计算前 4 项的数值时，每一项均在小数点后第 6 位四舍五入，则舍入误差小于 $4\times 5\times 10^{-6}=2\times 10^{-5}$，从而总误差小于

$$2\times 10^{-5}+2\times 10^{-5}=4\times 10^{-5}<10^{-4}.$$

于是

$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}\right)$$

$$\approx 0.6931.$$

8.3.2　计算数项级数的和

例 3　利用例 2 中 $\ln\frac{1+x}{1-x}$ 的幂级数展开式求下面数项级数的和

$$1+\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{5\cdot 2^4}+\frac{1}{7\cdot 2^6}+\cdots$$

解　因为

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right),\qquad -1<x<1,$$

令 $x=\frac{1}{2}$ 得

$$\ln 3=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\cdots\right)$$

$$=1+\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{5\cdot 2^4}+\frac{1}{7\cdot 2^6}+\cdots$$

例 4　求下列数项级数的和.

$$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots,$$

$$\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{8!}+\cdots,$$

$$\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{9!}+\cdots.$$

解　在 e^x 的幂级数展开式中令 $x=-1$ 得

$$e^{-1}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots,$$

令 $x=1$ 得 $e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$，从而

$$e^{-1}+e=2+2\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots\right),$$

即

$$\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots=\frac{e}{2}+\frac{1}{2e}-1.$$

同理可得

$$\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}\cdots=\frac{e}{2}-\frac{1}{2e}-1.$$

8.3.3　计算函数的极限

利用函数的幂级数展开式，还可以较简便地求出某些函数的极限.

例 5　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\sqrt{2}\,x-e^{-x^2}}{x^4}$

解　因为

$$\cos\sqrt{2}x=1-\frac{(\sqrt{2}x)^2}{2!}+\frac{(\sqrt{2}x)^4}{4!}-\frac{(\sqrt{2}x)^6}{6!}+\cdots,\quad -\infty<x<+\infty,$$

$$e^{-x^2}=1+(-x^2)+\frac{(-x^2)^2}{2!}+\frac{(-x^2)^3}{3!}+\cdots,\quad -\infty<x<+\infty,$$

所以

$$\cos\sqrt{2}x-e^{-x^2}=-\frac{1}{3}x^4+\frac{7}{45}x^6+\cdots,\quad -\infty<x<+\infty,$$

$$\frac{\cos\sqrt{2}x-e^{-x^2}}{x^4}=-\frac{1}{3}+\frac{7}{45}x^2+\cdots,$$

故

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos\sqrt{2}x-e^{-x^2}}{x^4}=\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{3}+\frac{7}{45}x^2+\cdots\right)=-\frac{1}{3}.$$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$

解 因为

$$\cos(\sin x)=1-\frac{(\sin x)^2}{2!}+\frac{(\sin x)^4}{4!}-\cdots,$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots,$$

$$(\sin x)^2=x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{2}{45}x^6+\cdots,$$

$$(\sin x)^4=x^4-\frac{2}{3}x^6+\cdots,$$

即

$$\cos(\sin x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4-\frac{1}{20}x^6+\cdots,$$

而

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots,$$

所以

$$\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\frac{1}{6}-\frac{7}{144}x^2+\cdots,$$

故

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{6}-\frac{7}{144}x^2+\cdots\right)=\frac{1}{6}.$$

8.3.4 计算定积分的近似值

利用函数的幂级数展开式,对于被积函数的原函数不容易求出或者根本不能用初等函数表示的定积分可以求出其近似值.

例 7 试计算概率积分

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx$$

的近似值，精确到小数点后第 4 位(即精确到 10^{-4})$\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\approx 0.56419\right)$.

解　e^{-x^2} 的原函数不能用初等函数表出，利用函数 e^x 的幂级数展开式可得被积函数的幂级数展开式为

$$e^{-x^2}=1+(-x^2)+\frac{(-x^2)^2}{2!}+\cdots \quad (-\infty<x<+\infty),$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots\right)dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\cdots\right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[1-\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{5\cdot 2!\cdot 2^4}-\frac{1}{7\cdot 3!\cdot 2^6}+\cdots\right].\end{aligned}$$

等式右边的级数是交错级数，试取前 4 项的和作为近似值，则截断误差为

$$|R_4|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{9\cdot 4!\cdot 2^8}<10^{-4},$$

满足题意要求，所以

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{5\cdot 2!\cdot 2^4}-\frac{1}{7\cdot 3!\cdot 2^6}\right).$$

为避免讨论舍入误差，在计算各项的值时，只须比要算的位数多算一、二位，就能保证精确度. 经计算得

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx \approx 0.5205.$$

例 8　试计算积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ 的近似值，精确到小数点后第 4 位.

解　注意到这个积分不是广义积分，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. 若补充定义被积函数在 $x=0$ 处的函数值等于 1，则积分就为常义积分. 对被积函数的幂级数展开式

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots \quad (-\infty<x<+\infty),$$

在区间[0,1]上逐项积分，得

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\frac{1}{7\cdot 7!}+\cdots.$$

等式右边的级数是交错级数，试取前三项的和作为近似值，则截断误差为

$$|R_3|\leqslant\frac{1}{7\cdot 7!}<10^{-4},$$

满足题意要求，把前三项求和得

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \approx 0.9461,$$

8.3.5 解微分方程

在微分方程一章中，介绍了常系数线性微分方程的解法. 利用函数的幂级数展开式，我们可以解一些变系数线性微分方程.

例 9 利用幂级数解微分方程

$$xy''+y'+xy=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$$

解 设方程的解为 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nx^n$，则

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}nC_nx^{n-1},$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_nx^{n-2}.$$

由 $y(0)=1$ 得 $C_0=1$，由 $y'(0)=0$ 得 $C_1=0$. 代入原方程

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}nC_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+1}=0,$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nC_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)C_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}C_{n-1}x^n=0.$$

因为 $C_1=0$，上式成为

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)^2C_{n+1}+C_{n-1}]x^n=0.$$

要使上式成立，各项系数必须等于零，因此有

$$2^2C_2+C_0=0,\quad C_2=-\frac{C_0}{2^2}=-\frac{1}{2^2};$$

$$3^2C_3+C_1=0,\quad C_3=0;$$

$$4^2C_4+C_2=0,\quad C_4=-\frac{C_2}{4^2}=\frac{1}{2^2\cdot 4^2};$$

$$5^2C_5+C_3=0,\quad C_5=0;$$

$$6^2C_6+C_4=0,\quad C_6=-\frac{C_4}{6^2}=-\frac{1}{2^24^26^2};$$

……

由此类推可得

$$C_{2n+1}=0,$$

$$C_{2n}=(-1)^n\frac{1}{[(2n)!!]^2},$$

其中 $(2n)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)$.

于是求得原方程的解为

$$y=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\cdots$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{[(2n)!!]^2}.$$

8.3.6 欧拉公式及应用

在无线电技术中常用到如下的欧拉公式

$$\begin{cases}\cos x=\dfrac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}),\\ \sin x=\dfrac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}),\end{cases}\quad(-\infty<x<+\infty)\qquad(8.1.3)$$

其中 $i=\sqrt{-1}$.

下面给出欧拉公式的形式推导. 在 e^x 的幂级数展开式中,把 x 换成 ix,注意到

$$i^2=-1, i^3=-i, i^4=1, i^5=i,\cdots$$

可得

$$e^{ix}=1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\cdots$$
$$=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right),$$

即

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,(-\infty<x<+\infty).\qquad(8.14)$$

式(8.14)也叫欧拉公式.

在(8.14)中用 $-x$ 取代 x 得 $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$,与(8.14)式相加或相减,就得到(8.13)式.

在(8.14)中把 x 换为 nx,可得

$$e^{inx}=\cos nx+i\sin nx\qquad(8.15)$$

例 10 利用欧拉公式把 $e^x\cos x$ 展开成 x 的幂级数.

解 $e^x(\cos x+i\sin x)=e^x\cdot e^{ix}=e^{(1+i)x}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(1+i)x]^n}{n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})]^n}{n!}x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4})}{n!}x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n,$$

所以

$$e^x\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n \quad (-\infty<x<+\infty),$$

还得到 $e^x\sin x$ 的展开式为

$$e^x\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n \quad (-\infty<x<+\infty).$$

例 11 利用欧拉公式求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$ 的和.

解 因为 $e^{inx}=\cos nx+i\sin nx$,所求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$ 是级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n!}+i\frac{\sin nx}{n!}\right)$ 的实部. 而

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n!}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{ix})^n}{n!}=e^{e^{ix}}\\&=e^{\cos x+i\sin x}=e^{\cos x}\cdot e^{i\sin x}\\&=e^{\cos x}[\cos(\sin x)+i\sin(\sin x)]\\&=e^{\cos x}\cdot\cos(\sin x)+ie^{\cos x}\cdot\sin(\sin x),\end{aligned}$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}=e^{\cos x}\cdot\cos(\sin x).$$

8.4 傅里叶级数

分析具有周期性的生物医学信号,如心电、脑电、胃电、肌电等,傅里叶级数是十分有力的工具.

8.4.1 周期为 2π 的函数的傅里叶级数

(1) 三角级数(trigonometric series)

在医药学研究中,遇到一个比较复杂的函数时,我们利用 x 的各次幂函数 x^0, $x^1,x^2,x^3,\cdots$ 的线性组合——幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 去讨论它. 若遇到具有周期性的生物医学信号时,就采用 x 的正弦函数和余弦函数

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots\cos nx,\sin nx,\cdots \tag{8.16}$$

的线性组合

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\cdots \tag{8.17}$$

去分析它们.

把式(8.17)称为**三角级数**.

将周期性的生物医学信号 $f(t)$ 仿式(8.17)展开，其物理意义是很明确的. 即比较复杂的周期性信号 $f(t)$ 可以看成是许多不同的频率的简单周期信号($\cos t$，$\sin t$，$\cos 2t$，$\sin 2t$，…)的叠加. 在无线电技术中，这种方法称为**谐波分析**. 其中常数 a_0 叫做 $f(t)$ 的**直流分量**；$a_1\cos t$ 和 $b_1\sin t$ 叫做**一次谐波**(或**基波**)；$a_2\cos 2t$ 和 $b_2\sin 2t$ 叫做**二次谐波**；…….

(2) 三角函数系的正交性

把(8.16)叫做**三角函数系**，(8.16)中的各个函数具有共同的周期 2π. 对于任意的自然数 m 和 n，利用定积分，可以证明下述各式成立：

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\mathrm{d}x = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\sin mx\mathrm{d}x = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos mx\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\sin mx\mathrm{d}x = 0\ (m\neq n);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\mathrm{d}x = \pi.$$

以上等式表明，三角函数系(8.16)中的任意不同的两个函数的乘积在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的积分等于零. 把这个性质称为**三角函数系的正交性**.

(3) 欧拉-傅里叶公式

设 $f(x)$ 的周期为 2π，且可以在区间 $[-\pi,\pi]$ 上展开为三角级数

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx). \tag{8.18}$$

如果函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积分，上式右端可以逐项积分，就可以求出三角级数的系数 $a_0,a_n,b_n(n=1,2,3,\cdots)$ 和 $f(x)$ 之间的关系.

先求 a_0，对(8.18)式在区间 $[-\pi,\pi]$ 上积分，利用三角函数系的正交性得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}a_0\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\mathrm{d}x = \pi a_0,$$

即

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x.$$

再求 a_n(n 为自然数)，将(8.18)式两边同乘以 $\cos kx$(k 为自然数)，然后在 $[-\pi,\pi]$ 上积分，利用三角函数系的正交性得

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\cos kx\mathrm{d}x \\ &= a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\mathrm{d}x \\ &= a_k\pi,\end{aligned}$$

即

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x.$$

同理可得 $b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x.$

综上所述,得到计算式(8.18)的系数的**欧拉-傅里叶公式**如下

$$\begin{cases}a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x, & n=0,1,2,\cdots,\\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x, & n=1,2,3,\cdots.\end{cases}\tag{8.19}$$

按公式(8.19)算出的系数 a_n,b_n 称为周期函数 $f(x)$的**傅里叶系数**.

(4) 傅里叶级数(fourier series)

以周期函数 $f(x)$的傅里叶系数 a_n,b_n 作出的三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\tag{8.20}$$

称为函数 $f(x)$的**傅里叶级数**.

下面给出这个傅里叶级数收敛于函数 $f(x)$的一个充分条件.

定理 1 如果以 2π 为周期的函数 $f(x)$在区间$[-\pi,\pi]$上满足:1°连续或只有有限个第一类间断点;2°只有有限个极值点,则 $f(x)$的傅里叶级数在区间$[-\pi,\pi]$上收敛,且它的和

(a) 当 x 为 $f(x)$的连续点时,等于 $f(x)$;

(b) 当 x 为 $f(x)$的间断点时,等于$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$;

(c) 当 x 为$[-\pi,\pi]$的端点时,等于$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

例 1 设 $f(x)$是周期为 2π 的函数,它在区间$[-\pi,\pi]$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 0, & 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$$

将 $f(x)$展开成傅里叶级数.

解 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上满足定理 1 的条件. 由(8.19)式得傅里叶系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}=\frac{1}{\pi n^2}[1-(-1)^n],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\end{aligned}$$

所以 $f(x)$的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$
$$=-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)$$
$$+\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots\right)\quad(-\pi<x<\pi).$$

当 $x=\pm\pi$ 时,按定理 1,上式右端的傅里叶级数收敛于和

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{-\pi+0}{2}=-\frac{\pi}{2}.$$

利用已知的傅里叶级数,可以简便地求出一些数项级数的和. 例如,在上式中令 $x=0$,我们得

$$0=-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right).$$

即

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}.$$

例 2　设 $f(t)$是周期为 2π 的函数,它在区间$[-\pi,\pi]$上的表达式为

$$f(t)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant t<0,\\ 1, & 0\leqslant t<\pi,\end{cases}$$

将 $f(t)$展开成傅里叶级数.

解　函数 $f(t)$在$(-\pi,\pi)$只有一个间断点 $t=0$,满足定理 1 的条件. 下面求 $f(t)$的傅里叶系数:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\mathrm{d}t=(-1)+1=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\cos nt)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nt\mathrm{d}t$$
$$=-\left.\frac{\sin nt}{n\pi}\right|_{-\pi}^{0}+\left.\frac{\sin nt}{n\pi}\right|_{0}^{\pi}=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\sin nt)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nt\mathrm{d}t$$
$$=\left.\frac{\cos nt}{n\pi}\right|_{-\pi}^{0}-\left.\frac{\cos nt}{n\pi}\right|_{0}^{\pi}=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n].$$

把求出的系数代入(8.20)式,就得到 $f(t)$的傅里叶级数展开式为

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]\sin nt$$
$$=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)t$$
$$=\frac{4}{\pi}\left[\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\frac{1}{7}\sin 7t+\cdots\right]$$
$$(-\pi<t<\pi;t\neq 0).$$

当 $t=0$ 时，傅里叶级数收敛于

$$\frac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=\frac{1-1}{2}=0 .$$

当 $t=\pm\pi$ 时，傅里叶级数收敛于

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{-1+1}{2}=0 .$$

如果把例 2 中的函数 $f(t)$ 理解为方波的波形函数在一个周期内的波形（周期 $2T=2\pi$，幅值 $E=1$，角频率 $\omega=1$），那么上面得到的展开式表明：方波是由一系列不同频率的正弦波叠加而成的. 为了阐明叠加起来的级数趋向于方波的过程，把级数的部分和逐渐趋近于这个间断函数 $f(t)$ 的图形描出来（见图 8.3）. 图 8.3A 是基波 $\frac{4}{\pi}\sin t$ 和方波 $f(t)$. 图 8.3B 中虚线是基波和 3 次谐波 $\frac{4}{3\pi}\sin 3t$，实线是它们的合

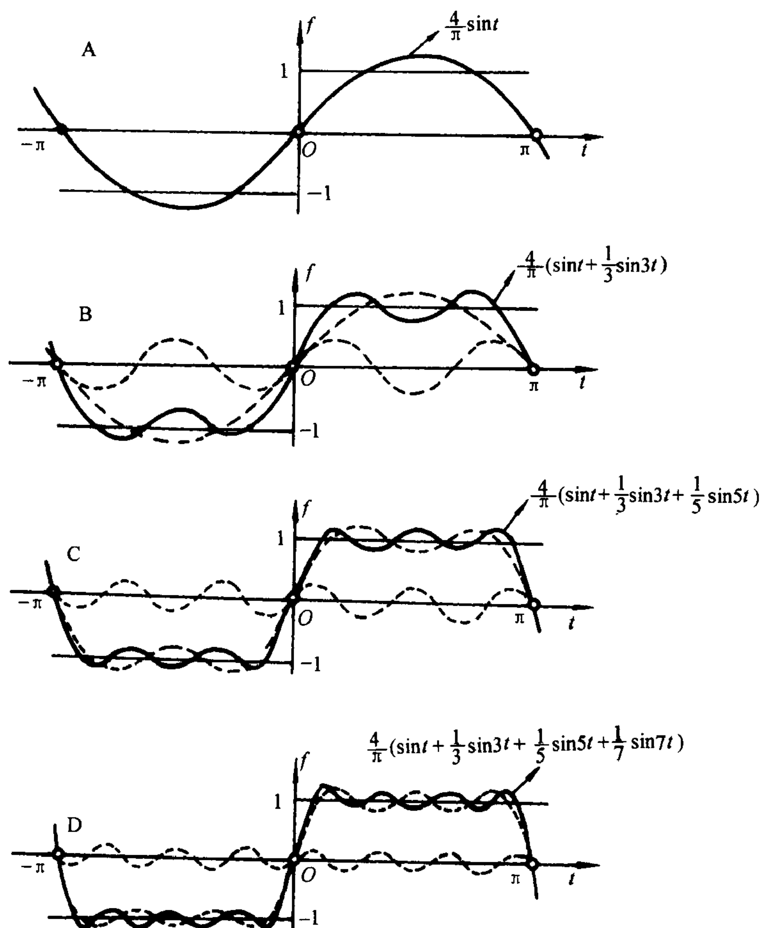


图 8.3

成波. 图 8.3C 中虚线是基波与 3 次谐波的合成波和 5 次谐波$\frac{4}{5\pi}\sin 5t$，实线是它们的合成波. 图 8.3D 中实线是 1 次、3 次、5 次和 7 次谐波的合成波. 显然可见项数取得越多，近似程度就越好.

8.4.2　函数展开为正弦级数或余弦级数

(1) 奇、偶函数的傅里叶级数

奇、偶函数的积分具有一些特殊性质，利用这些性质来求它们的傅里叶级数，可以简化计算过程. 例 2 中的函数是奇函数，它的傅里叶展开式中只有正弦项. 这并不是偶然的巧合，一般我们有下面的结论：

1) 奇函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶系数为

$$a_n = 0,\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x; \tag{8.21}$$

即奇函数的傅里叶级数是**正弦级数**(sine series)

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

2) 偶函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶系数为

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, b_n = 0; \tag{8.22}$$

即偶函数的傅里叶级数是**余弦级数**(cosine series)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx .$$

例 2 中的函数是奇函数，有了这个结论，就可以不必计算 a_n，显然可以大大减少计算量.

例 3　把函数 $f(x)=x(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开为傅里叶级数.

解　$f(x)$ 是奇函数且满足定理 1 的条件，故只须求傅里叶系数 b_n.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\mathrm{d}x$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n}(-1)^{n+1},$$

故函数 $f(x)=x$ 的傅里叶级数展开式为

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx \quad (-\pi < x < \pi),$$

当 $x=\pm\pi$ 时，$f(x)=x$ 的傅里叶级数收敛于

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0 .$$

(2) 函数展开为正弦级数和余弦级数

生物医学信号，如心电、脑电等信号的自变量 t 均大于零. 为了分析这些信号，有时需要把定义在区间 $[0,\pi]$ 上且满足定理 1 的条件的函数 $f(t)$ 展开成正弦级数或余弦级数. 我们采用的方法是：在区间 $(-\pi,0)$ 内补充函数 $f(t)$ 的定义，使 $f(t)$ 在

$(-\pi,\pi]$上成为奇(或偶)函数 $F(t)$. 然后将 $F(t)$展开成正弦(或余弦)级数. 再限制 t 在区间$[0,\pi]$上,于是便求得 $f(t)$的正弦(或余弦)级数.

按这种方式拓广函数定义域的过程叫做**奇(或偶)延拓**.

实际计算时,只须将$[0,\pi]$上的函数 $f(x)$视为$(-\pi,\pi]$上的奇(或偶)函数,展开成正弦(或余弦)级数,再将该级数限制到$[0,\pi]$上即可.

例 4 把函数 $f(x)=x+1(0\leqslant x\leqslant\pi)$展为余弦级数.

解 将 $f(x)$视为 $(-\pi,\pi]$上的偶函数,由(8.22)式得傅里叶系数为

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(x+1)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^\pi=\pi+2,$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(x+1)\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{\sin nx}{n}\right]_0^\pi\\&=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)\\&=-\frac{4}{(2n-1)^2\pi}.\end{aligned}$$

所求余弦级数展开式为

$$\begin{aligned}x+1&=\frac{\pi}{2}+1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi}\cos(2n-1)x\\&=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)\quad(0\leqslant x\leqslant\pi).\end{aligned}$$

8.4.3 周期为 2T 的函数的傅里叶级数

前面讨论了周期为 2π 的函数的傅里叶级数,利用它求出了定义在$[0,\pi]$上的生物医学信号的傅里叶级数. 但实际上遇到的大量生物医学信号将是定义在$[0,T]$上的. 所以我们还必须讨论周期为 $2T$ 的函数的傅里叶级数.

定理 2 设周期为 $2T$ 的函数 $f(x)$在$[-T,T]$上满足:1°连续或只有有限个第一类间断点;2°只有有限个极值点. 则 $f(x)$的**傅里叶级数**为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{n\pi x}{T}\right),\tag{8.23}$$

其中傅里叶系数 a_n,b_n 为

$$\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T}^{T}f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2\cdots),\\b_n=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T}^{T}f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}\mathrm{d}x\quad(n=1,2,3\cdots),\end{cases}\tag{8.24}$$

在$[-T,T]$上收敛,其和

(a) 当 x 为 $f(x)$的连续点时，等于 $f(x)$；

(b) 当 x 为 $f(x)$的间断点时，等于$\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$；

(c) 当 x 为 $[-T,T]$ 的端点时，等于$\dfrac{f(-T+0)+f(T-0)}{2}$.

由定理 2 不难推得如下结论：

1) 定义在$[0,T]$上的函数 $f(x)$的**正弦级数**为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{T} \quad \left(b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin \frac{n\pi x}{T}\mathrm{d}x\right). \tag{8.25}$$

2) 定义在$[0,T]$上的函数 $f(x)$的**余弦级数**为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{T} \quad \left(a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos \frac{n\pi x}{T}\mathrm{d}x\right). \tag{8.26}$$

例 5　把函数 $f(x)=x+1(0\leqslant x\leqslant T)$展为余弦级数.

解　$f(x)$满足定理 2 的收敛条件，由(8.26)得

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T (x+1)\mathrm{d}x = \frac{2}{T}\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^T = T+2\ ,$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T (x+1)\cos \frac{n\pi x}{T}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{T}\left[\frac{Tx}{n\pi}\sin \frac{n\pi x}{T} + \frac{T^2}{(n\pi)^2}\cos \frac{n\pi x}{T} + \frac{T}{n\pi}\sin \frac{n\pi x}{T}\right]_0^T \\
&= \frac{2T}{(n\pi)^2}(\cos n\pi - 1) \\
&= -\frac{4T}{\pi^2(2n-1)^2}.
\end{aligned}$$

故 $f(x)$的余弦级数展开式为

$$\begin{aligned}
x+1 &= \frac{T}{2} + 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4T}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(2n-1)^2}\cdot\cos \frac{(2n-1)\pi x}{T} \\
&= \frac{T}{2} + 1 - \frac{4T}{\pi^2}\left(\cos \frac{\pi x}{T} + \frac{1}{3^2}\cos \frac{3\pi x}{T} + \cdots\right) \quad (0\leqslant x\leqslant T).
\end{aligned}$$

例 4 是本例的特例，令 $T=\pi$ 即得例 4 的结果.

8.4.4　周期函数的频谱分析

分析生物医学信号时，常将周期性的信号(如心血管系统的信号)展开成傅里叶级数，以分析它所含的各频率成分(基波及各次谐波)的振幅随频率变化的分布情况，从中捕捉隐含于周期现象中的主要周期成分，并进一步确定其与人体的生理

及病理条件的关系，这种十分有用的方法叫做**频谱分析**.

设生物医学信号 $f(t)$ 是以 $2T$ 为周期的非正弦函数，由(8.23)式得它的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{T} + b_n\sin\frac{n\pi t}{T}\right),$$

其中傅里叶系数 a_n, b_n 为

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\cos\frac{n\pi t}{T}\mathrm{d}t, \qquad (n = 0,1,2,\cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\sin\frac{n\pi t}{T}\mathrm{d}t. \qquad (n = 1,2,3,\cdots).$$

$f(t)$ 的 n 次谐波 $\left(\omega_n=\omega_1\cdot n=\frac{2\pi}{2T}\cdot n=\frac{\pi n}{T}\right)$

$$a_n\cos\omega_n t+b_n\sin\omega_n t=A_n\sin(\omega_n t+\varphi_n)$$

的振幅为

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2} \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

它描述了各次谐波的振幅随频率变化的分布情况，使各次谐波对 $f(t)$ 的贡献大小一目了然.

为了更直观地分析各次谐波对 $f(t)$ 的贡献，以频率 ω 为横轴，振幅 A 为纵轴，描出各次谐波的频率 ω_n 与其振幅 A_n 的关系图. 把它称为 $f(t)$ 的**频谱图**，把 A_n 称为 $f(t)$ 的**振幅频谱**(简称为**频谱**).

下面以实例示范怎样对周期函数 $f(t)$ 进行频谱分析.

例 6 设 $f(t)$ 是周期为 $2T$ 的矩形波，在一个周期 $2T$ 内的表达式为

$$f(t)=\begin{cases}0, & -T\leqslant t<-\tau,\\ E, & -\tau\leqslant t\leqslant\tau,\\ 0, & \tau<t\leqslant T,\end{cases}$$

试作 $f(t)$ 的频谱分析.

解 $f(t)$ 为偶函数，傅里叶系数 $b_n=0$，傅里叶系数 a_n 为

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^\tau E\mathrm{d}t = \frac{2E\tau}{T},$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{n\pi t}{T}\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^\tau E\cos\frac{n\pi t}{T}\mathrm{d}t = \frac{2E}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T},$$

$f(t)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(t)=\frac{E\tau}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2E}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\cos\frac{n\pi t}{T}$$
$$=\frac{E\tau}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2E}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\cos n\omega_1 t,$$

其中 $\omega_1=\frac{2\pi}{2T}=\frac{\pi}{T}$.

$f(t)$的频谱为

$$A_0=|a_0|=\frac{2E\tau}{T};$$

$$A_n=|a_n|=\frac{2E}{n\pi}\left|\sin\frac{n\pi\tau}{T}\right| \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

若令 $T=4\tau,\tau=1,E=\pi$ 得($\omega_1=\frac{\pi}{4}$):

$$f(t)=\frac{\pi}{4}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{4}\cos n\omega_1 t$$
$$=\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2}\cos\omega_1 t+\cos 2\omega_1 t+\frac{\sqrt{2}}{3}\cos 3\omega_1 t-\frac{\sqrt{2}}{5}\cos 5\omega_1 t+\cdots\right),$$

$$A_0=\frac{\pi}{2},A_n=\frac{2}{n}\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right| \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

下面先画出 $f(t)$的频谱表,然后作频谱图(图 8.4).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
$\omega_n=n\omega_1$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	…
A_n	$\frac{\pi}{2}$	$\sqrt{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{7}$	0	…

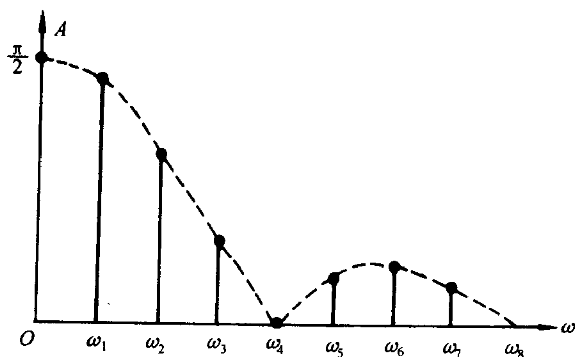


图 8.4

频谱图中横坐标 ω_n 处的垂线叫做**谱线**. 根据谱线的高低,可以很直观地看出哪些谐波的振幅大,哪些谐波的振幅小. 即哪些频率成分对 $f(t)$的贡献大,哪些频

率成分对$f(t)$的贡献小．抓住了这个主要矛盾，所讨论的实际问题就迎刃而解了．

例 7 试对函数

$$f(t)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant t<0,\\ 1, & 0\leqslant t<\pi,\end{cases}$$

作频谱分析．

解 由例 2 知$f(t)$的傅里叶级数展开式为($\omega_1=1$)

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\frac{1}{7}\sin 7t+\cdots\right).$$

$f(t)$的频谱为

$$A_{2n}=0,\quad A_{2n+1}=\frac{4}{(2n+1)\pi}\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

$f(t)$的频谱表和频谱图如下：

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
$\omega_n=n\omega_1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
A_n	0	$\frac{4}{\pi}$	0	$\frac{4}{3\pi}$	0	$\frac{4}{5\pi}$	0	$\frac{4}{7\pi}$	0	…

从频谱图 8.5 可以看到，1 次谐波对$f(t)$的贡献最大，3 次谐波次之，5 次谐波再次之，……．读者将此图与图 8.3 对照分析，一定会加深对频谱分析的理解，并从中得到有益的启示．

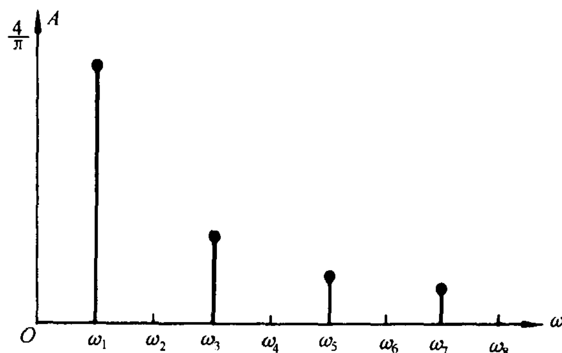


图 8.5

习　题　8

1. 写出下列级数的前 4 项：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+4}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{4}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

2. 写出下列级数的一般项：

(1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots$;

(2) $(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(2-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-2)+\cdots$;

(3) $\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\cdots$;

(4) $\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{7}\sin 7x+\cdots$;

(5) $x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$;

(6) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots$;

3. 判断下列级数的敛散性：

(1) $\frac{5}{6}-\frac{5^2}{6^2}+\frac{5^3}{6^3}-\frac{5^4}{6^4}+\cdots$;

(2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\cdots$;

(3) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots$;

(4) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$;

(5) $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10n}+\cdots$;

(6) $\cos\pi+\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}+\cdots$;

4. 用比较判别法，判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n(n^2+1)}}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n+a^n}\quad(a>0)$.

5. 用比值或根值判别法，判别下列级数的敛散性：

(1) $\frac{9}{1\cdot 8}+\frac{9^2}{2\cdot 8^2}+\frac{9^3}{3\cdot 8^3}+\frac{9^4}{4\cdot 8^4}+\cdots$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{8^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n\cdot n!}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2\arctan n)^n}$.

6. 判别下列级数是否收敛. 如果收敛，是绝对收敛，还是条件收敛？

(1) $\frac{3}{1}-\frac{5}{4}+\frac{7}{9}-\frac{9}{16}+\cdots$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n^2}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+a}$ （a 不等于负整数）；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{a}{n}$ （a 为常数）.

7. 求下列幂级数的收敛半径：

(1) $1-x+\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^3}{3^2}+\cdots$；

(2) $\frac{2^2}{2}x+\frac{2^3}{5}x^2+\frac{2^4}{10}x^3+\cdots+\frac{2^{n+1}}{n^2+1}x^n+\cdots$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^n}{n}$.

8. 求下列幂级数的收敛区间：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$；

(2) $\frac{x}{1\cdot 2}-\frac{x^2}{2\cdot 2^2}+\frac{x^3}{3\cdot 2^3}-\frac{x^4}{4\cdot 2^4}+\cdots$；

(3) $\frac{x}{1-3}+\frac{x^2}{2-3^2}+\frac{x^3}{3-3^3}+\cdots$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{n^2}x^n$ （$0<a<1$）；

9. 求下列级数的和函数 $S(x)$：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ （$|x|<1$）；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ （$|x|<1$）；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$（$|x|<1$），并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ 的和.

10. 把下列函数展开成 x 的幂级数，并确定其展开区间：

(1) $f(x)=\sin^2 x$；

(2) $f(x)=\ln(2+x)$；

(3) $f(x)=(1+x)e^{-x}$；

(4) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$；

(5) $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$.

11. 将下列函数在指定点处展开成幂级数：

(1) $f(x) = \ln x, x = 1$；

(2) $f(x) = \cos x, x = -\dfrac{\pi}{3}$.

12. 计算下列函数值的近似值：

(1) $\dfrac{1}{e}$，精确到小数点后第 4 位；

(2) $\cos 1°$，精确到 10^{-4}；

(3) $\sin 9°$，精确到 10^{-5}.

13. 计算下列定积分的近似值：

(1) $\displaystyle\int_0^{0.1} \frac{\arctan x}{x} dx$，精确到小数点后第 3 位；

(2) $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$，精确到 10^{-4}；

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^4}$，精确到 10^{-3}.

14. 利用函数 $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 的幂级数展开式，求数项级数

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5+\cdots+\frac{1}{2n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}+\cdots \text{的和 .}$$

15. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

16. 试用幂级数解法，求微分方程

$$\begin{cases} y''-xy=0, \\ y(0)=0, y'(0)=1 \end{cases}$$

的特解.

17. 利用幂级数解法，求微分方程

$$\begin{cases} xy''+y'-y=1, \\ y(0)=0, y'(0)=1 \end{cases}$$

的特解.

18. 利用欧拉公式求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$ 的和.

19. 利用傅里叶级数一节里的例题 1 求下面数项级数的和：

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

20. 把下列函数展为傅里叶级数：

(1) $f(x)=x^2 \quad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$；

(2) $f(x)=\begin{cases}\pi+x & (-\pi\leqslant x\leqslant 0)\\ \pi-x & (0<x\leqslant\pi)\end{cases}$；

(3) $f(x)=\pi-x \quad (0\leqslant x\leqslant\pi)$ （展为余弦级数）；

(4) $f(x)=e^{ax} \quad (a\neq 0),(0\leqslant x\leqslant\pi)$ （展为正弦级数）；

(5) $f(x)=\begin{cases}0 & (-T\leqslant x\leqslant 0)\\ 2 & (0<x\leqslant T)\end{cases}$.

21. 对傅里叶级数一节里的例题 6，令 $\tau=1$；$E=\pi$，然后分别求出 $T=2\tau$ 和 $T=6\tau$ 时函数 $f(t)$ 的频谱并画出频谱图.

习题 8 答案

1. (1) $\frac{1}{5}+\frac{2}{6}+\frac{3}{7}+\frac{4}{8}+\cdots$;

   (2) $1+\frac{3}{5}+\frac{4}{10}+\frac{5}{17}+\cdots$;

   (3) $\frac{1}{2!}+\frac{2!}{4!}+\frac{3!}{6!}+\frac{4!}{8!}+\cdots$;

   (4) $\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{4}+\sin\pi+\cdots$;

   (5) $\cos\pi+\frac{\cos 2\pi}{2}+\frac{\cos 3\pi}{3}+\frac{\cos 4\pi}{4}+\cdots$;

   (6) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$.

2. (1) $a_n=\frac{1}{2n}$;　　(2) $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;

   (3) $a_n=(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}$;　　(4) $a_n=\frac{1}{n}\sin nx$;

   (5) $a_n=\frac{x^n}{n!}$;　　(6) $a_n=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}$.

3. (1) 几何级数,公比为 $-\frac{5}{6}$,收敛.

   (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$,发散.

   (3) 级数由收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 对应项相加而成,收敛.

   (4) 级数的一般项 $a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$,前 n 项的和 $S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{4n+2}\to\frac{1}{2}(n\to+\infty)$,收敛.

   (5) 级数由收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 和发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10n}=\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 对应项相加而成,发散.

   (6) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{n}=1\neq 0$,发散.

4. (1) $\sin\frac{\pi}{2^n}\leqslant\frac{\pi}{2^n}=\pi\cdot\frac{1}{2^n}$,收敛.

   (2) $\frac{1}{(n+1)(n+4)}<\frac{1}{n^2}$,收敛.

   (3) $\frac{2}{\sqrt{n(n^2+1)}}<\frac{2}{n^{3/2}}=2\cdot\frac{1}{n^{3/2}}$,收敛.

   (4) 当 $a>1$ 时,$\frac{3}{n+a^n}<\frac{3}{a^n}=3\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^n$,收敛;

当 $0<a\leqslant 1$ 时，$\dfrac{3}{n+a^n}\geqslant\dfrac{3}{n+1}=3\cdot\dfrac{1}{n+1}$，发散.

5. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{9}{8}=\dfrac{9}{8}$，发散.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{8}\cdot\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2=\dfrac{1}{8}$，收敛.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{e}{2}$，发散.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{2\arctan n}=\dfrac{3}{\pi}$，收敛.

6. (1) 所给级数是莱布尼兹级数，但是 $|a_n|=\dfrac{2n+1}{n^2}>\dfrac{2n}{n^2}>\dfrac{1}{n}$，故级数条件收敛.

(2) 因为 $|a_n|=\sin\dfrac{1}{n^2}$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}}=1$，故级数绝对收敛.

(3) 因为 $|a_n|=\dfrac{1}{|n+a|}$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_n|}{\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{|n+a|}=1$，故级数条件收敛.

(4) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{a}{n}=1\neq 0$，发散.

7. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2=1, R=1$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}2\cdot\dfrac{n^2+1}{(n+1)^2+1}=2, R=\dfrac{1}{2}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1, R=1$.

8. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1, R=1$. 当 $x=\pm 1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(\pm 1)^n$，发散. 收敛区间为 $(-1,1)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+2}=\dfrac{1}{2}, R=2$. 当 $x=2$ 时，级数为 $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots$，收敛；当 $x=-2$ 时，级数为 $-1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}-\cdots$，发散. 收敛区间为 $(-2,2]$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-n}{3^{n+1}-(n+1)}=\dfrac{1}{3}, R=3$. 当 $x=3$，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n-3^n}$，一般项 $a_n=\dfrac{3^n}{n-3^n}$ 不趋于零，发散；同理，当 $x=-3$ 时发散. 收敛区间为 $(-3,3)$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}a^{2n+1}=0, R=+\infty$. 收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$.

9. (1) 令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\quad(|x|<1)$. $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}=\frac{x^4}{1-x^4}$.

$$S(x)=\int_0^x\frac{t^4}{1-t^4}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x.$$

(2) $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n-\sum_{n=1}^{\infty}x^n$. 而$\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$；令 $y(x)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$, $\int_0^x y(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(n+1)t^n\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}$

$=\frac{x^2}{1-x}$, 即 $y(x)=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}-1$, 故 $S(x)$

$=\frac{1}{(1-x)^2}-1-\frac{x}{1-x}$.

(3) $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2(n-1)}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$, $S(x)=\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$

$=\arctan x$. 故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n-1}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10. (1) $\sin^2x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\times\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},\quad x\in(-\infty,+\infty)$.

(2) $\ln(2+x)=\ln 2\cdot\left(1+\frac{x}{2}\right)$

$=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^n,\quad x\in(-2,2]$.

(3) $f(x)=\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-x)^n+x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-x)^n$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-n)\frac{x^n}{n!}$,
$x\in(-\infty,+\infty)$.

(4) $f(x)=\frac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]$

$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}\right]$

$=\sum_{n=1}^{\infty}[1+(-1)^{n-1}]\frac{x^n}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $x\in(-1,1)$.

(5) 设$\frac{x}{\sin x}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，由 $\sin x\cdot\frac{x}{\sin x}=x$ 得：$\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)\cdot(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)=x$，于是有 $a_0=1,a_1=0,a_2=\frac{1}{6},a_3=0,a_4=\frac{7}{360}$，$\cdots$，故$\frac{x}{\sin x}=1+\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{360}x^4+\cdots$.

11. (1) $\ln x=\ln[1+(x-1)]=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n},\quad x\in(0,2]$.

(2) $\cos x=\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+\frac{\pi}{3})^{2n}}{(2n)!}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+\frac{\pi}{3})^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(x+\frac{\pi}{3})^{2n}}{2(2n)!}+\frac{\sqrt{3}(x+\frac{\pi}{3})^{2n+1}}{2(2n+1)!}\right],$$

$x\in(-\infty,+\infty)$.

12. (1) 取$\frac{1}{e}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots$的前 6 项，$\frac{1}{e}\approx0.3674$；

(2) 取$\cos1°=\cos\frac{\pi}{180}=1-\frac{1}{2!}(\frac{\pi}{180})^2+\cdots$的前 2 项，$\cos1°\approx0.9999$；

(3) $\sin9°\approx0.15643$.

13. (1) 0.100； (2) 2.0000； (3) 0.494.

14. $\frac{1}{2}\cdot\ln5$.

15. $\frac{1}{2}$.

16. $y=x+\frac{x^4}{3\cdot4}+\frac{x^7}{3\cdot4\cdot6\cdot7}+\cdots$.

17. $y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$.

18. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}=e^{\cos x}\cdot\sin(\sin x)$.

19. $\frac{\pi}{4}$.

20. (1) $a_0+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2,a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=(-1)^n\cdot\frac{4}{n^2},b_n=\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\mathrm{d}x=0$. $x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{4}{n^2}\cos nx,\quad x\in[-\pi,\pi]$.

(2) $f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}(\cos x+\frac{\cos3x}{3^2}+\frac{\cos5x}{5^2}+\cdots),\quad x\in(-\pi,\pi)$.

(3) $\pi-x-\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos nx,\quad x\in(0,\pi)$.

(4) $e^{ax} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-1)^n e^{a\pi}]\cdot\frac{n}{n^2+a^2}\sin nx,\quad x\in(0,\pi).$

(5) $f(x) = 1+\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{T}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{T}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{T}+\cdots\right), 0<|x|<T.$

21. $T=2\tau$ 时：

$$A_0=\frac{2E\tau}{T}=\frac{2E\tau}{2\tau}=\pi;$$

$$A_n=\frac{2E}{n\pi}\left|\sin\frac{n\pi\tau}{T}\right|$$

$$=\frac{2}{n}\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right|\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

$T=6\tau$ 时：

$$A_0=\frac{2E\tau}{T}=\frac{2\pi\tau}{6\tau}=\frac{\pi}{3};$$

$$A_n=\frac{2E}{n\pi}\left|\sin\frac{n\pi\tau}{T}\right|$$

$$=\frac{2}{n}\left|\sin\frac{n\pi}{6}\right|\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

第 9 章

概率论基础

概率论(probability)是高等数学的一个分支,它是研究随机现象出现的可能性的科学.因此在研究方法与思维方式上有独特之处.从某种意义上说,概率论既弥补了微积分的不足,又充实了微积分的内涵,因为许多客观现象只能用概率论的方法去研究,而研究过程中又需要用到微积分知识.

概率论是统计学的理论基础,同时,在临床决策和遗传学中亦有广泛应用.本章主要介绍随机事件及其概率、随机变量、分布函数以及随机变量的数字特征,为后继学科——统计学、诊断学和遗传学等学科的学习打下基础.

9.1 随机事件

前面几章研究了函数的某些特性,这些特性的共同之处就是它们的确定性,然而在我们的研究领域中还存在着大量的无法确定结果的现象.例如测量人的肺活量,即使年龄、身高、体重、性别、职业都相同,所测量的肺活量也会有差别.就是同一个人,重复测量也不会每次都相同.自然界的这种不确定性称为随机性.本节介绍随机事件及事件间的关系.

9.1.1 随机试验和随机事件

在一定条件下,事先不能预料结果(没有确定结果)的试验称为**随机试验**.随机试验的各个结果称为**随机事件**(random events),习惯上用 $A,B,C\cdots$ 等表示.

随机事件的例子举不胜举.

例 1 一个口袋里有质地、大小相同的 5 个红球、5 个白球.从中随意取 2 个,可能有 3 种结果:

A:取出的两个都是白球;

B:取出的两个都是红球;

C:取出一个白球、一个红球.

取两个球的试验是随机试验,因为它没有确定的结果,A,B,C 是试验的结果,在每次试验中它们可能发生,可能不发生,因此称为随机事件.

例 2　50 个病人都服用某一种药,观察有多少人治愈,这个试验是随机试验,因为事先不可能确定治愈的人数.试验的结果可以有很多,"45 人治愈"是其中一个可能的结果,称为随机事件.

例 3　对 4 个人进行乙肝表面抗原试验,试验的结果可能有 5 种:

A:4 个都为阳性;

B:3 个为阳性、1 个为阴性;

C:2 个阳性、2 个阴性;

D:1 个阳性、3 个阴性;

E:4 个都为阴性.

事件 A,B,C,D,E 都为随机事件.

作为随机事件的特例,我们介绍另两种事件:

必然事件:随机试验中(在一定条件下),必然出现的事件称为**必然事件**,记为 $\boldsymbol{U}$.

不可能事件:随机试验中(在一定条件下),必然不出现的事件称为**不可能事件**,记为 $\boldsymbol{V}$.

例 4　有 10 个同类产品,其中 9 个正品,1 个次品.从中任意抽取 3 个,若事件 A 表示"其中至少有 2 个正品",事件 B 表示"其中没有正品".则事件 A 为必然事件,事件 B 为不可能事件.

9.1.2　事件间的关系

为研究事件,我们需讨论事件间的关系.

(1) 包含与相等,两事件之差

如果事件 A 发生,则事件 B 必然发生,称 **B 包含 A** 记 $\boldsymbol{A\subseteq B}$(图 9.1).

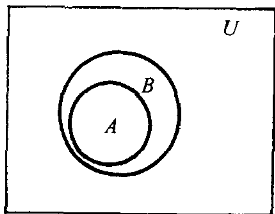


图 9.1

如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则称事件 **A 与 B 相等**,记为 $\boldsymbol{A=B}$.

如果 A 发生而 B 不发生,称为事件 **A 与 B 的差**,记为 $\boldsymbol{A-B}$(图 9.2).

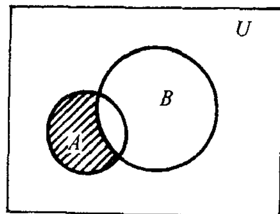


图 9.2

例如测量 50 个人的体重,事件 A 表示体重大于 60kg,B 表示体重大于 50kg,则 $A\subseteq B$,体重大于 50kg 但小于或等于 60kg 的事件为 $B-A$.

(2) 事件的和

事件 A 与事件 B 中至少有一个发生,这样的事件称为事件 **A 与 B 的和**,记 $\boldsymbol{A+B}$ 或 $A\cup B$(图 9.3).从图中

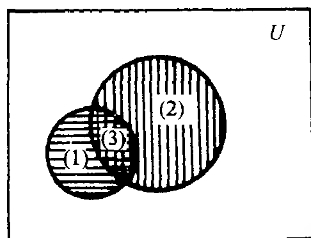


图 9.3

可看出 $A\cup B$ 通常包含 3 个部分：①A 发生而 B 不发生；②B 发生而 A 不发生；③A 和 B 都发生.

例如事件 A 表示“甲的血清含肝炎病毒”，事件 B 表示“乙的血清含肝炎病毒”，事件 C 表示“甲、乙混合血清含肝炎病毒”，则 $C=A+B$.

类似可定义 ***n* 个事件之和**：$A_1+A_2+\cdots+A_n$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生.

(3) 事件的积

图 9.4

事件 A 发生，且同时事件 B 发生(即 A,B 同时发生)，称为 ***A* 与 *B* 的积**，记 $\boldsymbol{AB}$(图 9.4).

显然 $AB=BA$.

例如 A 表示症状“咳嗽”，B 表示症状“发烧”，则 AB 表示“既咳嗽又发烧”的症状.

又如 A 表示“女性”，B 表示“肝炎患者”，则 AB 表示“女肝炎患者”.

类似可定义 ***n* 个事件的积**：$\boldsymbol{A_1A_2\cdots A_n}$ 表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生.

如 A 表示“色盲”，B 表示“女性”，C 表示“年龄 10 岁以上”，则 ABC 表示“10 岁以上女色盲患者”.

如果上例中要表示“女色盲者或 10 岁以上色盲者”这样的事件，则可用 $AB+AC$ 表示.

(4) 互不相容事件

在试验中事件 A 与事件 B 不可能同时发生，即 $AB=V$，则称 ***A* 与 *B* 互不相容.**

例如有 0,1,…,9 十个数字，从中任选两个数字，A 表示两数字之和为 5，B 表示两个数字之和为 9，则 A,B 互不相容. 又如检验血液中白细胞数，A 表示白细胞数在 6000 以上，B 表示白细胞数在 4000～7000 的范围内，则 A 与 B 可同时发生(例如某人白细胞数为 6500)，称 A 与 B 相容.

(5) 对立事件(逆事件)

试验结果中，除了事件 A 之外的所有事件之和，称为 ***A* 的对立事件，记为** $\overline{A}$.

显然 A 与 $\overline{A}$ 互不相容($A\overline{A}=V$)且 $A+\overline{A}=U$.

例 3 中，A,B,C,D,E 互不相容，

$$A+B+C+D+E=U,\ \overline{A}=B+C+D+E.$$

如果再假设 A_1 表示至少有两个阴性，A_2 表示最多 1 个阴性，A_3 表示至少 3 个阳性，则

A_1 表示 2 个阴性、3 个阴性或 4 个阴性，故

$$A_1=C+D+E.$$

A_2 表示没有阴性或一个阴性，故

$$A_2=A+B.$$

A_3 表示 3 个阳性或 4 个阳性，故

$$A_3=A+B.$$

且 $A_3=A_2$（只是表达方式不同）.

由逆事件定义还可知：$A_2=\overline{A}_1$ 或 $A_1=\overline{A}_2$.

（6）事件运算分配律

$\boldsymbol{B(A_1+A_2+\cdots+A_n)=BA_1+BA_2+\cdots+BA_n}$

$\boldsymbol{(A_1+A_2+\cdots+A_n)B=A_1B+A_2B+\cdots+A_nB}$

考虑一个比较复杂的事件，可以将它**分解为一些简单事件的运算**，这是今后**解决实际问题的关键一步**.

例 5　设 A,B,C 为 3 个事件，试用 A,B,C 的运算来表示以下事件.

(a) D_1：A 发生，B 与 C 都不发生.

解　B 不发生表示为 $\overline{B}$，C 不发生表示为 $\overline{C}$，B,C 都不发生表示为 $\overline{B}\overline{C}$. 故

$D_1=A\overline{B}\,\overline{C}$.

(b) D_2：A,B,C 中至少发生一个.

解　根据事件和的定义知

$D_2=A+B+C$.

(c) D_3：3 个事件都不发生.

解　根据对立事件及事件积的定义知

$D_3=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

(d) D_4：3 个事件中恰有一个发生.

解　恰有 A 发生即 $A\overline{B}\,\overline{C}$，恰有 B 发生即 $\overline{A}B\overline{C}$，恰有 C 发生即 $\overline{A}\,\overline{B}C$. 故 3 个中恰有一个发生 $D_4=A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$.

(e) D_5：不多于一个事件发生.

解　D_5 为 D_3 和 D_4 之和，即

$D_5=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$.

思考题

1. 设 A,B 为互不相容事件，它们是否为对立事件，反之怎样？试举例说明.
2. 事件 $\overline{AB}$ 与 $\overline{A}\,\overline{B}$ 是否相等？
3. 事件 $A+B$ 怎么用 $\overline{A},\overline{B}$ 来表示？$A+B+C$ 又怎么用 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 来表示？
4. 作图表示 $\overline{A}$.

思考题解答

1. A,B 为互不相容事件，但不一定为对立事件，只有当 $A+B=U$ 时，它们才互为对立事件，反之对立事件一定是互不相容事件. 例如，掷骰子的试验中，密度均匀的正方体骰子共有 6 面，设事件 A 表示向上的面出现 6 点，事件 B 表示向上面出现 3 点，显然 A 与 B 互不相容，但 A 与 B 不是对立事件，因为除 A,B 之外还有出现 1,2,4,5 点的事件. 又如 A 表示身高≥1.80m 的事件，B 表示身高<1.5m 的事件，A 与 B 互不相容，但互相不对立，A 的对立事件 $\overline{A}$ 为身高<1.8m 的事件.

2. 考察事件 $A\overline{B}$，它属于$\overline{AB}$，但不属于 $\overline{A}\,\overline{B}$，故$\overline{AB}$与 $\overline{A}\,\overline{B}$ 不相等.

3. 由图 9.3 知 $A+B$ 的对立事件为 $\overline{A}\,\overline{B}$，故 $A+B=U-\overline{A}\,\overline{B}$.

同理 $A+B+C=U-\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

4. 略.

9.2 频率与概率

随机现象的特点是它的不确定性，亦即在单独一次观测中，它的发生与否是带偶然性的. 但是，多次重复观测，我们会发现，在一定条件下，它发生的可能性是具有一定规律的. 概率论就是研究随机现象出现的可能性的科学，它要从看起来错综复杂的偶然性中揭示出潜在的规律性，并用数量来加以刻画. 本节探讨这种数量刻画的方法.

9.2.1 频率与概率

先考虑一个实例，丢硬币时出现正面与反面完全是偶然的，但是当丢硬币的次数 n 增大时，出现正面的次数 m 与 n 的比值 m/n 愈来愈接近 0.5. 这个结果一般人都知道，不信的话不妨自己试一下.

定义 1 设随机事件 A 在 n 次试验中发生 m 次，称比值 m/n 叫做随机事件 A **的频率**(Frequency)，记为 $W(A)$，表示为

$$\boldsymbol{W(A)=\frac{m}{n}}.$$

显然 $m\leqslant n$，任何随机事件的频率是介于 0 和 1 之间的一个数，即

$$0\leqslant \boldsymbol{W(A)}\leqslant 1.$$

如果 A 是必然事件，则 $m=n$，$W(A)=1$；如果 A 是不可能事件则 $m=0$，$W(A)=0$.

定义 2 设随机事件 A 的频率 $W(A)=\frac{m}{n}$，当试验次数 n 充分大时，$W(A)$在某一数字 $P(A)$附近摆动，称 $P(A)$为**随机事件 A 的概率**(probability). 显然

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

随机事件 A 的频率与我们进行的试验有关，例如丢硬币的试验中，若丢 40 次出现正面 (A) 22 次，则 $W_1(A)=\frac{22}{40}$；丢 60 次出现正面 28 次，则 $W_2(A)=\frac{28}{60}$，$W_1(A)\neq W_2(A)$. 但是无论怎么试验，$W(A)$ 都接近 0.5，表明 A 的概率 $P(A)$ 是客观存在的，与试验无关.

以上定义为统计意义下的概率，$P(A)$ 必须进行大量试验才能得到，试验次数 n 越大，$P(A)$ 的估计值就越准确. 以下介绍一种比较简单的分析方法，称之为古典意义下的概率.

9.2.2　古典概型

(1) 基本事件

定义 3　事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，设

1) 在试验中它们出现的可能性相同(**等可能性**)；

2) $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容(**互不相容性**)；

3) 在一次试验中至少有一个发生(**完备性**).

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为基本事件或称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成**等概基本事件组**.

例如 10 个产品，从中抽取 3 个，则等概基本事件组有 C_{10}^3 个基本事件；

从 $0,1,\cdots,9$ 十个数字中任取一个数字，A_k 是抽到数字 $k(k=0,1,\cdots,9)$ 这一事件，则等概基本事件组有 10 个基本事件；

6 个人排成一排照相，因为站立的顺序不同，可以照出不同的相片，故等概基本事件组包括 6! 个基本事件；

将 N 个不同的球放进 N 个编了号的盒中，每个球可以放进其中任意一个盒中，共有 N^N 种不同的放法，基本事件共有 N^N 个. 如果规定每个盒中只能放一个球，则第一个球有 N 种放法，第二个球有 $N-1$ 种放法，……，基本事件共有 $N!$ 个.

(2) 古典概型

定义 4　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一个等概基本事件组，而事件 A 是由其中某 m 个基本事件组成，则**事件 A 的概率**

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

显然

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

例 6　从 $0,1,2,\cdots,9$ 十个数字中任取一个数字，求取得奇数数字的概率.

解　基本事件总数 $N=10$，取得奇数数字的基本事件数为 5，故

$$P(\text{取得奇数数字})=\frac{5}{10}=0.5.$$

例 7　袋内有质地、大小相同的 5 个白球，3 个黑球. 从中任取 2 个球，求取出两个球都是白球的概率.

解 设取出2个白球的事件为A.

因为基本事件总数$N=C_8^2=28$,A所包含的基本事件总数$M=C_5^2=10$,故

$$P(A)=\frac{M}{N}=\frac{10}{28}=0.357.$$

例8 在N个同样产品中有M个是次品,从中任取n个,求其中有$m(m<M)$个次品的概率.

解 设A为n个产品中有m个次品的事件

基本事件总数为C_N^n;

m个次品的取法有C_M^m种;

$(n-m)$个正品的取法有C_{N-M}^{n-m}种;

故A所包含的基本事件总数为$C_M^m C_{N-M}^{n-m}$,

$$P(A)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

例9 平面上有10个点,没有任何3点在同一条直线上,将这10个点组成不同的三角形,任选其中一个,试问恰为以某点A为顶点的三角形的概率为多少?

解 基本事件总数为$C_{10}^3=120$.

以A为顶点的三角形个数为$C_9^2=36$.

设A表示事件"以A为顶点的三角形",则

$$P(A)=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}.$$

思考题

1. 有10个患者服某种药品,其中有8人痊愈,试问0.8表示什么意义?能否说任选10人服药,其中必有8人痊愈?
2. 概率等于零的事件是不是一定为不可能事件?
3. 如果试验的基本事件为无穷多个,如何计算某事件的概率?

思考题解答

1. 0.8可表示两个意义:1)在这10次试验中,出现治愈者的频率为0.8;2)从这10个人中任选一人,此人是治愈者的概率为0.8.

如果任选10人服药,却不一定刚好8人治愈,这类问题将在§9.5讨论.

2. 概率等于零的事件不一定是不可能事件.例如圆盘上有一根以圆心为支点的指针,它可以自由转动,那么它转动后停下时,指针指向圆弧上某一固定点B的概率为零,但不是不可能事件.

3. 如果试验的基本事件有无穷多个,但可用某种数量特征(如长度、面积)来表示其总和(设为s),并且事件A所包含的基本事件也可用同样的数量特征来表示

(设为 l),则事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{l}{s}.$$

例如上例中,指针指向某一个圆心角为 $\alpha°$ 的一段弧上的概率

$$P=\frac{\alpha}{360}.$$

9.3 概率的基本公式

为计算较复杂事件的概率,本节介绍一些概率的基本公式.

9.3.1 概率的加法公式

定理 1 设事件 A 与 B 互不相容,则有

$$\boldsymbol{P(A+B)=P(A)+P(B)}.$$

证明 用古典概型加以证明,设等概基本事件组共有 N 个基本事件,事件 A 包含 M_1 个,事件 B 包含 M_2 个. 由于 A、B 互不相容,故事件 $A+B$ 包含 M_1+M_2 个. 所以

$$P(A+B)=\frac{M_1+M_2}{N}=\frac{M_1}{N}+\frac{M_2}{N}=P(A)+P(B).$$

推论 1 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容,且

$$A_1+A_2+\cdots+A_n=U,$$

则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1.$$

推论 2 若 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件,则

$$P(A)=1-P(\overline{A}).$$

推论 3 事件 A 与 B,若 $A\supset B$,则

$$P(A-B)=P(A)-P(B).$$

定理 2 如果 A,B 为任意两个事件,则

$$\boldsymbol{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)}.$$

推论 设 A,B,C 为任意 3 个事件,则

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC).$$

例 10 一批产品共 10 个,其中 3 个是次品,若从中随意抽取 2 个,求有正品的概率.

解 1 设 A_1 表示有一个正品,A_2 表示有两个正品,A 表示有正品,则 A_1,A_2 互不相容,且

$$A=A_1+A_2.$$

因为

$$P(A_1)=\frac{C_3^1C_7^1}{C_{10}^2}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15},$$

$$P(A_2)=\frac{C_7^2C_3^0}{C_{10}^2}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15},$$

故

$$P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)=0.933.$$

解 2 设 B 是两个都为次品的事件，A 为有正品的事件，则

$$A+B=U \text{ 即 } B=\bar{A}.$$

故

$$P(A)=1-P(B)=1-\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=1-\frac{3}{45}=0.933.$$

例 11 电池 A 与 B，若 A 损坏的概率 $P(A)=0.01$，B 损坏的概率 $P(B)=0.02$，两个都损坏的概率 $P(AB)=0.0002$，求 A,B 串联时线路发生故障的概率.

解 设 C 表示线路发生故障，则 $C=A+B$，由于 A,B 可同时损坏，故 A,B 相容. 故

$$\begin{aligned}P(C)&=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=0.01+0.02-0.0002=0.0298.\end{aligned}$$

9.3.2 概率的乘法定理

(1) 条件概率

定义 1 设 A,B 为两个事件，如果在 B 发生的条件下，计算 A 发生的概率，这种概率称为**事件 A 在事件 B 发生的条件下的概率**，记为 $P(A/B)$.

例 12 两台车床加工同一种零件数量和合格品如下表所列，从加工的零件中任取一件，

	合格数	次品数	总计
第一台加工零件数	35	5	40
第二台加工零件数	50	10	60
总　　计	85	15	100

设 A 表示合格品，B 表示第一台车床加工零件，求 $P(A)$和 $P(A/B)$.

解 零件总数 100，合格品总数 85，故

$$P(A)=\frac{85}{100}=0.85.$$

第一台加工总数 40，合格品 35，故

$$P(A/B)=\frac{35}{40}=0.875.$$

例 13　袋内有质地相同、大小相同的 10 个白球、2 个黑球. 设 A 为从口袋里摸出一个白球，B 为从口袋里摸出一个黑球，C 为在第一次从口袋里摸出一个黑球未放回的情况下，第二次摸出一个白球，求 $P(A)$和 $P(C)$.

解　袋内共有 12 个球，其中 10 个白球，故

$$P(A)=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}.$$

第一次摸出一个黑球后未放回，则袋内有 10 个白球，1 个黑球，故

$$P(C)=P(A/B)=\frac{10}{11}.$$

显然，不同的条件下，摸白球的概率不同.

上题中，如果第一次取出一个球后又放回，则第二次摸时，袋内仍有 12 个球，摸到白球的概率仍为$\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$. 这说明在不同的试验中，$B$ 的发生可能影响 A 发生的概率，也可能不影响 A 发生的概率.

(2) 事件的独立性

定义 2　两个事件 A 与 B，如果 B 的发生不影响 A 发生的概率，即 $\boldsymbol{P(A)=P(A/B)}$，则称 **A 与 B 独立**.

事件 A 与 B 是否独立，有时可由常识判断.

例如：两个战士打靶，A 为甲射中 10 环，B 为乙射中 10 环，显然 B 的发生不影响 A 发生的概率，A 与 B 独立.

又如：检查血清中是否含有肝炎病毒，甲含有肝炎病毒的事件为 A，乙含有肝炎病毒的事件为 B，一般情况下 A 与 B 独立，但如果乙是甲的直系亲属，又长期生活在一起，这就难说了. 医学上要判断两个事件是否独立，光凭感觉和经验是不够的，可按独立的定义来判别.

例 14　若 A 表示患某种疾病，B 表示年龄在 40 岁以上，考察 A 与 B 是否独立，我们要考虑 $P(A)$和 $P(A/B)$，列出以下统计数字表：

	A	$\bar{A}$	合　计
B	a	b	$a+b$
$\bar{B}$	c	d	$c+d$
合计	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d=n$

人群总人数 n，其中得病者为 $a+c$，故

$$P(A)=\frac{a+c}{n}.$$

年龄在 40 以上总数为 $a+b$，其中患病者为 a，故

$$P(A/B)=\frac{a}{a+b}.$$

如果 $P(A)\approx P(A/B)$，表明 B 的发生不影响 A 的发生，年龄与患病无关；如果 $P(A/B)>P(A)$，说明 40 岁以上的人容易患此病；如果 $P(A/B)<P(A)$，说明 40 岁以上的人不容易患此病.

两事件 A,B，若 A 与 B 独立，则可以证明 B 与 A，$\overline{B}$ 与 A，$\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 都独立.

(3) 概率的乘法定理

定理 3 两个事件乘积的概率等于其中一事件的概率与另一事件在前一事件已发生的条件下的条件概率的乘积. 即

$$\boldsymbol{P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)}$$

$$\text{或 } \boldsymbol{P(AB)=P(B)\cdot P(A/B)}.$$

推论 1 如果 A,B 独立，则

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

推论 2 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdots P(A_n/A_1A_2\cdots A_{n-1})$.

推论 3 如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互相独立，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$$

例 15 在所给的一个果蝇种群中发生了两个性状变异，其中 25%的果蝇发生了翅膀变异，15%发生了眼变异，10%两种变异都发生. 现在随机选择一只果蝇，问：1)如果这只果蝇发生了翅变异，也发生眼变异的概率是多少？ 2)如果它发生了眼变异，也发生翅变异的概率为多少？

解 设 A,B 分别表示发生翅变异和眼变异这两种事件. 由已知

$P(A)=25\%,\quad P(B)=15\%,\quad P(AB)=10\%.$

故(a) $P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.1}{0.25}=\frac{2}{5}$；

(b) $P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.1}{0.15}=\frac{2}{3}$.

例 16 有 3 个串联的系统，设每个系统互不影响，它们不能正常运作的事件分别为 A_1,A_2,A_3，$P(A_1)=0.002$，$P(A_2)=0.1$，$P(A_3)=0.4$，求系统的事故发生率.

解 设系统发生事故为事件 B，则

$$B=A_1+A_2+A_3.$$

按加法公式来计算 $P(B)$ 较为麻烦，如果考虑 B 的逆事件，运算可简单些. 因为

$$\overline{B}=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3.$$

而 $\overline{A}_1$、$\overline{A}_2$、$\overline{A}_3$ 互相独立，故

$$\begin{aligned}P(B)&=1-P(\overline{B})\\&=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) \\
&= 1 - 0.998 \times 0.9 \times 0.6 \\
&= 0.47.
\end{aligned}
$$

思考题

1. 事件 A 与 B,试问 $P(AB)$ 与 $P(B/A)$ 有什么区别? 试举一实例说明.
2. 试证:若 A 与 B 独立,则 A 与 $\bar{B}$ 独立.
3. 证明:$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

思考题解答

1. $P(AB)$ 为 A 和 B 同时发生的概率,因此既要考虑 A 发生的概率,又要考虑 B 发生的概率,$P(B/A)$ 表明 B 发生的概率,只是此时增加了"A 已经发生"这样一个先决条件. 例如:A 表示 10 岁以下儿童,B 表示患脑膜炎. $P(AB)$ 表示人群中任抽一人,此人既是 10 岁以下又患脑膜炎的概率,$P(B/A)$ 表示 A 已经发生的情况下(亦即从 10 岁以下的儿童中)任抽一人,此人患脑膜炎的概率.

2. 因为 $A=AU=A(B+\bar{B})=AB+A\bar{B}$,而 B 与 $\bar{B}$ 互不相容,推得 AB 与 $A\bar{B}$ 互不相容. 故

$$P(A)=P(AB)+P(A\bar{B}),$$

即

$$
\begin{aligned}
P(A\bar{B}) &= P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) \\
&= P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(\bar{B}).
\end{aligned}
$$

即证得 A 与 $\bar{B}$ 独立.

3. $A+B=A\bar{B}+B$

因为 $A\bar{B}$ 与 B 互不相容,故

$$P(A+B) = P(A\bar{B}) + P(B). \tag{1}$$

又因为

$$A = A\bar{B} + AB,$$

$A\bar{B}$ 与 AB 互不相容,故

$$P(A) = P(A\bar{B}) + P(AB),$$

即

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB). \tag{2}$$

将(2)代入(1),得

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

9.4　全概公式和逆概公式

全概公式和逆概公式也是考虑较复杂事件时常用的一种计算方法，它们都有典型的概率模型，理解了典型的概率模型，举一反三就不难了.

9.4.1　全概公式

全概公式的典型模式是摸彩票. 先看一个例题.

例 17　如果有 10 张票，其中有两张是彩票，我们要问第二个人摸到彩票的概率与第一个人摸到彩票的概率是否相等？

解　设第一个人摸到彩票的事件为 A_1，则

$$P(A_1)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}.$$

又设第二个人摸到彩票的事件为 A_2，考虑 A_2 就较复杂了，它可分解为两个事件的和：

(a) 第一个人没有摸到而第二个人摸到，即 $\overline{A}_1A_2$；

(b) 第一人摸到彩票，第二人也摸到彩票，即 A_1A_2.

故 $A_2=\overline{A}_1A_2+A_1A_2=A_2(\overline{A}_1+A_1)$.

$P(A_2)-P(\overline{A}_1A_2)+P(A_1A_2)$.

而 $P(A_2/A_1)=\frac{1}{9}$，$P(A_2/\overline{A}_1)=\frac{2}{9}$，$P(\overline{A}_1)=\frac{8}{10}$，由乘法公式，

$$\begin{aligned}P(A_2)&=P(\overline{A}_1)P(A_2/\overline{A}_1)+P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\\&=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{9}\\&=\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

第二个人与第一个人中彩的概率均为 1/5，下面请按 $P(A_2)$ 的计算方法来理解全概公式.

定理 1（全概公式 Total Probability Formula）　如果事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足

(a) $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容；

(b) $A_1+A_2+\cdots+A_n=U$，$B=B(A_1+A_2+\cdots+A_n)$，

则对事件 B 有

$$\boldsymbol{P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i)}.$$

证明

$$\begin{aligned}B=BU&=B(A_1+A_2+\cdots+A_n)\\&=BA_1+BA_2+\cdots+BA_n.\end{aligned}$$

由于 A_i 互不相容，BA_i 亦互不相容.

$$\begin{aligned}P(B) &= P(BA_1) + P(BA_2) + \cdots + P(BA_n) \\ &= P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + \cdots + P(A_n)P(B/A_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i).\end{aligned}$$

例 18　某医院采用 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ 治疗方案医治疾病 D，患者采用这 4 种方案的百分比分别为 10%，20%，25%，45%，其治愈率分别为 0.80，0.94，0.95，0.97，问到该医院接受疾病 D 治疗的患者，治疗有效的概率为多少？

解　设 A_i 表示第 i 种治疗方案($i=1,2,3,4$)，B 表示治疗有效，利用全概公式得

$$\begin{aligned}P(B) &= \sum_{i=1}^{4} P(A_i)P(B/A_i) \\ &= 0.10 \times 0.80 + 0.20 \times 0.94 \\ &\quad + 0.25 \times 0.95 + 0.45 \times 0.97 \\ &= 0.942.\end{aligned}$$

上例中，有时亦会这样考虑问题，即某人到该院医治疾病 D，得到痊愈，那么他是接受第 i 种($i=1,2,3,4$)治疗方案治疗的概率为多少？这就是下面要介绍的逆概公式.

9.4.2　逆概公式

定理 2 逆概公式(inverse probability formula)　如果 $A_1+A_2+\cdots+A_n=U$，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，且 $B=B(A_1+A_2+\cdots+A_n)$，则在 B 发生的条件下，事件 A_i 发生的概率

$$\boldsymbol{P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)}}.$$

证明　利用概率乘法公式，

$$P(A_iB)=P(B)P(A_i/B)$$

或 $P(A_iB)=P(A_i)P(B/A_i)$，

故

$$P(B)P(A_i/B)=P(A_i)P(B/A_i),$$

即

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)}.$$

此公式亦称**贝叶斯(Bayes)公式**，因分母相同，有时我们要比较 $P(A_i/B)$ ($i=1,2,\cdots,n$)，只需计算分子的值 $P(A_i)P(B/A_i)$进行比较.

例 19　例 18 中，如果某人在该院医治疾病 D，得到痊愈，试问，他接受第 4 种

治疗方案的概率为多大?

解 由例 18 知 $P(B)=0.942$,利用逆概公式,得

$$P(A_4/B)=\frac{P(A_4)\cdot P(B/A_4)}{P(B)}=\frac{0.45\times 0.97}{0.942}\approx 0.463.$$

在医学应用上逆概公式的一个典型模式是真阳性率的确定.

例 20 某种疾病 C,如果人群中的患病概率为 $P(C)=0.005$. 采用一种新的检验方法,患者的阳性率为 0.95,未患者的阳性率为 0.01,试问:某人如果经检验为阳性,那么他确实得这种病的概率为多少?

解 设检验结果为阳性的事件为 A,由已知得

$$P(A/C)=0.95,\ P(A/\bar{C})=0.01.$$

由于

$$P(C)=0.005,$$

故

$$P(C)=0.995.$$

利用全概公式得

$$\begin{aligned}P(A)&=P(C)\cdot P(A/C)+P(\bar{C})\cdot P(A/\bar{C})\\&=0.005\times 0.95+0.995\times 0.01=0.0147.\end{aligned}$$

再用逆概公式,得

$$P(C/A)=\frac{P(C)P(A/C)}{P(A)}=\frac{0.005\times 0.95}{0.0147}=0.32.$$

说明普查中结果为阳性确实得该种病的可能性为 0.32. 能否说这种检验方法不好呢? 不能. 通常医生总是先分析临床症状,当他怀疑某人可能患病时,才采用此项检查,这时被怀疑对象中 $P(C)$就显著增加,例如 $P(C)=0.5$,按上述方法计算得 $P(C/A)=0.98$,这就有相当高的准确性了.

逆概公式亦可用于疾病 D_1 和 D_2 的鉴别诊断. 我们可选择互相独立的症状 S_1, S_2, $\cdots$, S_k,将 $S=S_1S_2\cdots S_k$ 理解为上例中的阳性,用逆概公式求出 $P(D_1/S)$和 $P(D_2/S)$,再比较大小. 如果 $P(D_1/S)\gg P(D_2/S)$,则可考虑诊断为疾病 D_1;如果 $P(D_2/S)\gg P(D_1/S)$,则可考虑诊断为疾病 D_2,如果 $P(D_1/S)\approx P(D_2/S)$,说明暂时不能确诊.

例 21 设某病人,35 岁,女,有乳腺肿块,肿块表面整齐,偏硬,近期未见明显增大,边界不清,长度约 2cm. 如何鉴别病人患乳癌(d_1),纤维乳腺瘤(d_2),还是其他乳腺病(d_3).

解 设

S_{11} 年龄<40 岁, S_{12} 年龄≥40 岁;

S_{21} 肿块表面整齐, S_{22} 肿块表面不整齐;

S_{31} 肿块中等硬度, S_{32} 偏硬,S_{33}硬;

S_{41}　肿块近期增大慢，　S_{42}　中等，S_{43}快；

S_{51}　边界清，　S_{52}　欠清，S_{53}不清；

S_{61}　肿块长度<2.75cm，　S_{62}　≥2.75cm；

统计验前概率为：

$P(d_1)=0.1559$	$P(d_2)=0.4946$	$P(d_3)=0.3495$
$P(S_{11}/d_1)=0.1379$	$P(S_{11}/d_2)=0.8043$	$P(S_{11}/d_3)=0.8308$
$P(S_{21}/d_1)=0.0699$	$P(S_{21}/d_2)=0.4891$	$P(S_{21}/d_3)=0.4615$
$P(S_{32}/d_1)=0.5517$	$P(S_{32}/d_2)=0.8370$	$P(S_{32}/d_3)=0.7538$
$P(S_{41}/d_1)=0.1034$	$P(S_{41}/d_2)=0.0435$	$P(S_{41}/d_3)=0.2462$
$P(S_{53}/d_1)=0.1379$	$P(S_{53}/d_2)=0.0326$	$P(S_{53}/d_3)=0.1539$
$P(S_{61}/d_1)=0.2069$	$P(S_{61}/d_2)=0.7500$	$P(S_{61}/d_3)=0.8615$

因为 $S=S_{11}S_{21}S_{32}S_{41}S_{53}S_{61}$，

$$P(d_1)\cdot P(S/d_1)=0.1559\cdot P(S_{11}/d_1)\cdot P(S_{21}/d_1)\cdot P(S_{32}/d_1)$$
$$P(S_{41}/d_1)\cdot P(S_{53}/d_1)\cdot P(S_{61}/d_1)$$
$$=2.414\times10^{-8}.$$
$$P(d_2)\cdot P(S/d_2)=1.732\times10^{-4},$$
$$P(d_3)\cdot P(S/d_3)=3.295\times10^{-3},$$

逆概公式 $P(d_i/S)=\dfrac{P(d_i)P(S/d_i)}{P(S)}$中，由于分母 $P(S)$相同，只须比较分子，故由上述计算可知 $P(d_3/S)$最大. 诊断为 d_3：其他乳腺疾病.

思考题

1. 怎么知道各种症状之间是否相互独立.

2. 袋内有质地、大小相同的 8 个黑球，两个白球，从袋中无放回地摸一个球. 设事件 B_1 为第二次摸到白球，B_2 为第二次才摸到白球. 问 B_1 和 B_2 一样吗？计算 $P(B_1)$和$P(B_2)$时方法有什么不同？

3. 试将以下概念用数学方法描述：

(1) 症状 A_1 和 A_2 不同时出现；

(2) 症状 A_1 和 A_2 同时出现的可能性；

(3) 设 A：40 岁以下，B：48 岁以上，C：高血压，D：耳鸣.

(a) 48 岁以上患高血压的可能性；

(b) 某人 48 岁以上既患高血压又耳鸣的可能性；

(c) 任选一人，此人刚好 48 岁以上，且患以上两种病的可能性；

(d) 任选一人，此人在 41～47 岁的可能性；

(e) 任选一人，或高血压或耳鸣的可能性.

思考题解答

1. 判断各症状之间的独立性可由医生的临床经验、独立的定义、统计中的相关系数、模糊数学的相关分析等方法.

2. 设 $A_i(i=1,2)$ 为第 i 次摸到白球，则

$B_1=A_2(A_1+\overline{A}_1)$，计算 $P(B_1)$ 要用全概公式；

$B_2=\overline{A}_1A_2$，计算 $P(B_2)$ 要用概率乘法公式.

3. (1) $U-A_1A_2$；

(2) 求 $P(A_1A_2)$；

(3) (a) $P(C/B)$；

(b) $P(CD/B)$；

(c) $P(BCD)$；

(d) $P(\overline{BA})$ 或 $1-P(A+B)$；

(e) $P(C+D)$.

9.5 独立重复试验

独立重复试验是实际中常见的一种概率模型(亦称为**伯努利**(Bernoulli)**概型**). 它的特点是每次试验中，某一结果(事件 A)出现的概率 P 相同，重复试验 n 次. 要讨论这 n 次试验中，事件 A 发生 k 次的概率 $P_n(k)$.

独立重复试验最典型的例子是丢骰子，每次试验中向上面出现 6 点的概率为 1/6，可重复 n 次.

例 22 丢骰子试验，如果重复丢 5 次，问其中有两次(向上面)为 6 点(设为事件 A)的概率为多少？

解 设 B 为第一、三两次出现 6 点，其余没有出现 6 点，由于每次试验互不干涉(互相独立)，故

$$P(B)=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3.$$

而实际上 5 次中有两次出现 6 点的情况共有 C_5^2 种，这些事件又互不相容，根据加法定理有

$$P(A)=C_5^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3.$$

将这种思考问题的方法推广到一般情况. 设在一定条件下事件 A 出现的概率为 p，进行独立重复 n 次试验，其中 A 发生 k 次概率

$$P_n(k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}.$$

例 23 设一种治疗方法对某种疾病的治愈率为 p，20 个患此病的人都用这种

方法治疗，问其中至少有 15 人治愈（设为事件 A）的概率为多少？

解　20 人都用此种治疗方法，可以理解为进行 20 次独立重复试验，至少 15 人治愈的事件为 6 个事件之和，它们分别是 15 人、16 人、…、20 人治愈．这些事件之间互不相容，故

$$P(A)=\sum_{k=15}^{20}C_{20}^{k}p^{k}(1-p)^{20-k}.$$

例 24　甲、乙两个篮球运动员，投篮命中率分别为 0.7 和 0.6，每人投篮 3 次，求两人都进 2 个球的概率 $P(A)$．

解　投篮 3 次进两个球，即为 3 次独立重复试验中出现两次．

设甲进两个球为事件 A_1，乙进两个球为事件 A_2，则

$$P(A_1)=C_3^2\times0.7^2\times0.3=0.441,$$

$$P(A_2)=C_3^2\times0.6^2\times0.4=0.432$$

而 $A=A_1A_2$ 且 A_1,A_2 相互独立，故

$$P(A)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$$

$$=0.441\times0.432=0.19.$$

在独立重复试验中，如果 n 很大，p 很小，可以用**第一近似公式计算**：

$$P_n(k)\approx\frac{(np)^k}{k!}e^{-(np)}.$$

如果 n 很大，p 不是很小时，可用**第二近似公式**计算：

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{k-np}{2[np(1-p)]}}.$$

例 25　某种疾病在某个地方的发病率为万分之二，若随机抽取 2 万人，求发现患者至多 2 个（设为事件 A）的概率为多少？

解　用第一近似公式计算：

其中 $n=20000$，$k=0,1,2$，　$p=0.0002$．故

$$P(A)=\sum_{k=0}^{2}\frac{(np)^k}{k!}e^{-np}$$

$$=\frac{4^0}{0!}e^{-4}+\frac{4^1}{1!}e^{-4}+\frac{4^2}{2!}e^{-4}$$

$$=13e^{-4}=0.24.$$

从以上几节的例题可以看出，用公式计算概率本身并不复杂，困难的是分析事件的类型，它属于哪种概率模型，是由哪些已知事件组合，事件的运算又是怎样，能不能用逆事件计算，有没有条件概率，事件之间是否相容，是否独立等等．希望读者在解决实际问题时特别注意这一点．

思考题

1．“从一批产品中，抽取 n 个产品检验，求其中有两个次品的概率”这样的问

题，什么时候用古典概型解，什么时候用伯努利概型解？

思考题解答

1. 如果一批产品的个数较小，并说明总数为 M，其中次品数 m，那么每抽出一个，就会影响下一次抽到次品的概率，此时要用古典概型计算；如果没有具体说明 M 和 m，只给出次品率 p（每次抽取时 p 不变），显然从中取 n 个，相当于进行 n 次独立重复试验，要用伯努利概型计算.

9.6 分布函数

前面几节介绍了各种概率的计算方法，能不能用经典的函数关系来研究概率论中的问题呢？这一节将介绍一种新的函数关系——分布函数，它为概率论的研究提供了一种有效的方法.分布函数的自变量和因变量的确定方法较为特殊，为此先介绍随机试验结果的数量化——随机变量.

9.6.1 随机变量

先考察几个例子：

例 26 丢 10 次硬币，结果可有 11 个，它们分别为正面出现 0 次，1 次，…，10 次.我们将试验的结果用 0，1，…，10 这 11 个数值表示.

例 27 从一批学生中检查色盲，从中任抽一个学生，结果有两个，色盲或未患色盲.如规定色盲为 1，未患色盲为 0，则试验结果可用 0，1 两个数字表示.

例 28 测定某一人群的肺活量（单位为 l），设测得的结果在[0，16]内，则试验的结果可用[0，16]中的数表示.

可见，随机试验的结果可以数量化.

定义 1 若对于一个随机试验的每一个可能的结果 w，都有惟一的实数 $\xi(w)$ 与之对应，则称 $\xi(w)$ 为**随机变量**（random variables），简记为 ξ.

例 1 中 $\xi=0,1,\cdots,10$. 例 2 中 $\xi=0,1$. 例 3 中 $\xi\in[0,16]$.

如果随机变量 ξ 的取值可逐一列举，则称之为**离散型随机变量**（例 1 和例 2）；如果随机变量 ξ 的取值在某一区间或整个数轴，则称之为**连续型随机变量**（例 3）.

9.6.2 分布函数

（1）分布函数的定义

随机变量 ξ，对任意 x，有对应的 $P(\xi=x)$，它表示当 $\xi=x$ 时的概率；也有对应的 $P(\xi\leqslant x)$，它表示 $\xi\leqslant x$ 时的累积概率.

例 1 中，

$$P(\xi=2)=C_{10}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{8},$$

$$P(\xi\leqslant 2)=P(\xi=0)+P(\xi=1)+P(\xi=2)$$
$$=\sum_{k=0}^{2}C_{10}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k}.$$

而例3中，对任意 x，几乎都有 $P(\xi=x)=0$，只能讨论 $P(\xi\leqslant x)$，它表示肺活量小于或等于 x 的概率. 由此可见，对连续型随机变量，讨论 $P(\xi=x)$没有实际意义. 为使离散型随机变量和连续型随机变量有一个统一的函数关系，我们讨论 $P(\xi\leqslant x)$.

定义2 随机变量 ξ，对任意 x，其累积概率 $P(\xi\leqslant x)$称为 ξ 的**分布函数**(distribution function)，记 $F(x)=P(\xi\leqslant x)$.

(2) 分布函数的性质

1) 因为任何事件的概率都是介于0与1之间的数，故 $0\leqslant F(x)=P(\xi\leqslant x)\leqslant 1$.

2) $P(x_1<\xi\leqslant x_2)=P(\xi\leqslant x_2)-P(\xi\leqslant x_1)$
$=F(x_2)-F(x_1)$.

3) 当 $x_1<x_2$ 时，有 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$.

即 $F(x)$为非减函数.

4) 若 ξ 的一切值位于$[a,b]$内，则

当$x<a$ 时，$F(x)=0$，

$x\geqslant b$ 时，$F(x)=1$.

5) $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，

$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$.

(3) 离散型随机变量的分布函数

离散型随机变量 ξ，其取值为 $x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots$如果已知 $P(\xi=x_k)=p_k$，显然

$$\boldsymbol{F(x)=P(\xi\leqslant x)=\sum_{x_k\leqslant x}(\xi=x_k)=\sum_{x_k<x}P_k}.$$

如用表格表示 $P(\xi=x_k)=P_k$，则为

ξ	x_1	x_2	…	x_k	…
P	P_1	P_2	…	P_k	…

称之为随机变量 ξ 的**分布列**(分布律或概率分布). 由此可求分布函数.

例29 设 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	0.3	0.1	0.2	0.4

求 ξ 的分布函数 $F(x)$及 $P\left(\frac{1}{3}<\xi\leqslant 2\right)$，$P\left(\frac{1}{3}\leqslant\xi<2\right)$.

解 根据分布函数的定义，有

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.3, & 0\leqslant x<1,\\ 0.3+0.1=0.4, & 1\leqslant x<2,\\ 0.3+0.1+0.2=0.6, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & 3\leqslant x,\end{cases}$$

$$P\left(\frac{1}{3}<\xi\leqslant 2\right)=F(2)-F\left(\frac{1}{3}\right)=0.6-0.3=0.3,$$

$$P\left(\frac{1}{3}\leqslant\xi<2\right)=P\left(\frac{1}{3}<\xi\leqslant 2\right)-P(\xi=2)+P\left(\xi=\frac{1}{3}\right)=0.1.$$

离散型随机变量有一些典型的分布.

定义 3 如果随机变量 ξ 的概率分布为

1) $P(\xi=1)=p \qquad (0<p<1)$,

$P(\xi=0)=q=1-p$.

则称 ξ 服从以 p 为参数的**二点分布**(0-1 分布);

2) $P(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k=0,1,\cdots,n)$,$0<p<1$,$q=1-p$,则称 ξ 服从参数为 n,p 的**二项分布**(binamial distribution);

3) $P(\xi=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (k=0,1,2\cdots)$,$\lambda>0$,则称 ξ 服从参数为 λ 的**泊松**(poisson)**分布**,记 $\xi\sim P(\lambda)$.

例 30 设用某种药物治疗某种病的治愈率为 0.8,今用该药治疗 10 例,求治愈人数 ξ 的分布函数.

解 该试验为 10 重伯努利试验,ξ 服从参数为 10,0.8 的二项分布.

分布列 $P(\xi=k)=C_{10}^k(0.8)^k(0.2)^{10-k}(k=0,1,\cdots,10)$,

分布函数
$$F(x)=P(\xi\leqslant x)=\sum_{k\leqslant x}C_{10}^k(0.8)^k(0.2)^{10-k}.$$

例如 $x=3$,$F(3)=\sum\limits_{k=0}^{3}C_{10}^k(0.8)^k(0.2)^{10-k}$.

上一节中介绍过独立重复试验中,n 很大,p 很小时

$$P_n(k)=\frac{(np)^k}{k!}e^{-(np)}.$$

表明二项分布当 n 很大,p 很小时,近似为 $\lambda=np$ 的泊松分布.

例 31 500ml 微生物溶液中有微生物 150 只.问从中抽出 1ml 溶液中含微生物多于 2 只的概率为多少?

解 对每只微生物而言,刚好在这 1 毫升溶液中的概率为 $p=\dfrac{1}{500}=0.002$,考虑 150 只微生物,相当于做 $n=150$ 次独立重复试验.用泊松分布来近似,$\lambda=np=0.3$,查附录三可知

$$P(\xi\leqslant 2)=\sum_{k\leqslant 2}\frac{0.3^k}{k!}e^{-0.3}\approx 0.996390.$$

故

$$P(\xi>2)=1-0.996390=0.00361.$$

(4) 连续型随机变量的分布函数

对连续型随机变量 ξ，不能像离散型随机变量那样考虑 $P(\xi=x)$的值，因此考虑在$[x,x+\Delta x]$上的平均概率 $P(x\leqslant\xi\leqslant x+\Delta x)/\Delta x$，因为

$$\frac{P(x\leqslant\xi\leqslant x+\Delta x)}{\Delta x}=\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}.$$

令 $\Delta x\to 0$，左边为 x 的函数，可理解为概率密度，设为 $\varphi(x)$，右边为分布函数的导数 $F'(x)$，因此，分布函数 $F(x)$实际上是概率密度函数 $\varphi(x)$的一个原函数，现给出以下定义.

定义 4　对于随机变量 ξ，如果存在一个非负可积函数 $\varphi(x)(-\infty<x<+\infty)$，使对于任意 $a<b$，都有

$$P(a<\xi\leqslant b)=\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

则称 $\varphi(x)$为 ξ 的**概率密度函数**(probability density function).

$$F(x)=P(\xi\leqslant x)=P(-\infty<\xi\leqslant x)$$
$$=\int_{-\infty}^{x}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

为分布函数，如图 9.5 所示.

由定义可知道

(a) $P(-\infty<\xi<+\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=F(+\infty)=1$；

(b) $P(\xi=a)=\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x=0$；

(c) $P(a<\xi<b)=P(a\leqslant\xi<b)=P(a<\xi\leqslant b)$
$=P(a\leqslant\xi\leqslant b)=\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x$；

(d) ξ 落在$[a,b]$上的概率是由 $x=a,x=b,y=0,y=\varphi(x)$所围成的曲边梯形的面积.

下面介绍几种典型的连续型随机变量的分布.

定义 5　设连续型随机变量 ξ 的概率密度为 $\varphi(x)$

(a) $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

则称 ξ 在$[a,b]$上服从**均匀分布**(uniform distribution)，记 $\boldsymbol{\xi\sim U[a,b]}$；

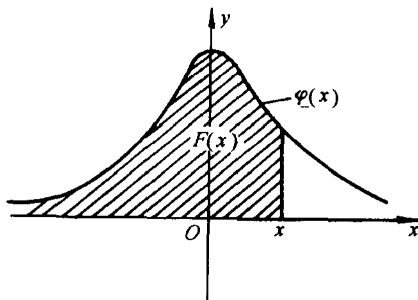


图 9.5

(b) $\varphi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\ (\lambda>0),\end{cases}$

则称 ξ 服从**参数为 λ 的指数分布**(exponential distribution);

(c) $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\quad(\sigma>0,-\infty<x<+\infty)$,

则称 ξ 服从**参数为 μ,σ^2 的正态分布**(normal distribution),记为 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$. 特别当 $\mu=0,\sigma=1$ 时,称 ξ 服从**标准正态分布,记 $\xi\sim N(0,1)$**.

例 32 设 ξ 服从参数为 λ 的指数分布,求 ξ 的分布函数 $F(x)$.

解 由定义知

$$F(x)=P(\xi\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(x)dx$$

$$=\begin{cases}\int_0^x\lambda e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

例 33 设 $\xi\sim U[a,b]$,求 ξ 的分布函数 $F(x)$ 及 $P(a_1<\xi<b_1)$,其中 $[a_1,b_1]\subset[a,b]$.

解 当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时

$F(x)=\int_{-\infty}^{a}0dx+\int_a^x\frac{1}{b-a}dx=\frac{x-a}{b-a}$.

当 $x>b$ 时,$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{b-a}dx=\int_a^b\frac{1}{b-a}dx=1$,

当 $x<a$ 时,$F(x)=0$.

故当 $[a_1b_1]\subset[a,b]$ 时,$P(a_1<\xi<b_1)=F(b_1)-F(a_1)=\dfrac{b_1-a_1}{b-a}$.

例 34 设 $\xi\sim$ 标准正态分布 $N(0,1)$,求 ξ 的分布函数 $\Phi(x)$,并证:$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

解 $N(0,1)$的密度函数为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(-\infty<x<+\infty),$$

故分布函数

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

$\Phi(x)$的值可查附录四. 又因为

$$\Phi(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-x}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\xlongequal{y=-t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{x}\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=1-\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

故

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x).$$

例35 如果$\xi\sim N(0,1)$,求$P(0.5<\xi<1.5)$和$P(-2<\xi<1)$.

解 $P(0.5<\xi<1.5)=\Phi(1.5)-\Phi(0.5)$,

查标准正态分布函数表知

$\Phi(1.5)=0.93319$, $\Phi(0.5)=0.69146$.

故

$$P(0.5<\xi<1.5)=0.93319-0.69146=0.24173,$$

$$\begin{aligned}P(-2<\xi<1)&=\Phi(1)-\Phi(-2)\\&=\Phi(1)-[1-\Phi(2)]\\&=\Phi(1)+\Phi(2)-1.\end{aligned}$$

查表知$\Phi(1)=0.84134$, $\Phi(2)=0.97725$.故

$$P(-2<\xi<1)=0.81859.$$

顺便解释一下,对分布函数,有些书上定义为$F(x)=P(\xi\leqslant x)$,有些书上定义为$F(x)=P(\xi<x)$,本书采用前一种定义方法.

思考题

1. 随机变量与随机事件是不是一回事?
2. 分布函数$F(x)$中的x表示什么?
3. 怎么知道随机变量ξ服从哪种分布?
4. 由ξ的概率分布能否知道$\eta=2\xi+1$的概率分布?

ξ	0	1	2
P	0.4	0.1	0.5

思考题解答

1. 两者不是一回事.随机变量是对随机试验结果的量化表示,这些结果是带有随机性的,而且是不同的,所以称为随机变量.随机事件是指随机试验的某些结果.

例如对某人的血液做白细胞检查,白细胞的个数是试验的结果的量化表示,称为随机变量(记为ξ).ξ可能为2500,也可能为3000.而随机事件A表示具体一种情况,如白细胞数大于4000,即$\xi>4000$.

2. 分布函数$F(x)$中的x是随机变量ξ的取值范围,即$\xi\leqslant x$,$F(x)=P(\xi\leqslant x)$表示ξ从$-\infty$到x的累计概率,并不表示$\xi=x$时的概率$P(\xi=x)$.

3. 该问题涉及统计知识——统计推断.首先要设计试验,以便合理有效地获得

观测资料，然后对观察所得的有限资料进行推断，确定随机变量属哪一种分布，其参数又在什么范围之间，并用概率的大小表明推断的可靠程度.

4. 由ξ的概率分布可推算$\eta=2\xi+1$的概率分布. 只须将$\xi=0,1,2$分别代入$\eta=2\xi+1$，得η的取值为1,3,5，故η的分布列为

η	1	3	5
P	0.4	0.1	0.5

此问题涉及随机变量的函数，可参阅概率论方面的专业书.

9.7 随机变量的数字特征

随机变量的分布函数是对随机变量概率特性的完整描述、但实际问题中，往往可以只研究随机变量的某些数字特征来反映其概率特性. 例如数学期望、中位数、众数、方差、标准差、变异系数、极差、偏度、峰度、r阶中心矩等，其中最常用的是数学期望和方差，本节将予以介绍. 关于其他一些数字特征，有兴趣的读者可参阅概率论专业书.

9.7.1 数学期望

随机变量的数学期望(mathematical expectation)是描述**随机变量位置特征**的一个量.

(1) 离散型随机变量的数学期望

某射手每枪击中的环数ξ为一随机变量，设ξ的概率分布为

ξ	8	9	10
P	0.3	0.1	0.6

如要考核射手的射击水平，让他射击n次. 设n_k表示射中k环的次数，则平均每次射中的环数为$\frac{1}{n}[8n_8+9n_9+10n_{10}]=8\cdot\frac{n_8}{n}+9\cdot\frac{n_9}{n}+10\cdot\frac{n_{10}}{n}$，$n$很大时，频率的稳定值即为概率，平均每次射中的环数即为

$$8\times0.3+9\times0.1+10\times0.6=9.3.$$

由此看出这个射手的水平为平均每次射中9.3环，这个平均值是以概率为权的加权平均值.

定义1 设离散型随机变量ξ的概率分布为

ξ	x_1	x_2	…
P	p_1	p_2	…

如果级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

绝对收敛，称其为 ξ 的**数学期望**，记为 $E\xi$，即

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

例 36　求服从 0-1 分布的随机变量 ξ 的数学期望.

x_i	$x_1=0$	$x_2=1$
$P(\xi=x_i)$	$1-p$	p

解　$E(\xi) = \sum_{i=1}^{2} x_i P_i = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p.$

例 37　求二项分布的数学期望.

解　设随机变量 ξ 服从二项分布，n 次独立重复试验中事件 A 出现 k 次的概率

$$P_n(k) = c_n^k p^k q^{n-k} \quad (q = 1-p),$$

则

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} \\ &= np(p+q)^{n-1} = np. \end{aligned}$$

此结果说明事件 A 在一次试验中出现的概率为 p，则在 n 次独立重复试验中，事件 A 出现的次数 ξ 的期望值为 np.

用同样的方法可以求得泊松分布的数学期望为 λ，读者可自己验算.

(2) 连续型随机变量的数学期望

设连续型随机变量的密度函数为 $\varphi(x)$，由于

$$\begin{aligned} P(x < \xi < x + \Delta x) &= F(x + \Delta x) - F(x) \\ &\approx \varphi(x)\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

故离散型随机变量的 $x_i P(\xi = x_i)$ 对应于连续型随机变量为 $x\varphi(x)\mathrm{d}x$，$\sum x_i P(\xi = x_i)$ 对应于 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\mathrm{d}x$，于是给出如下定义.

定义 2　设连续型随机变量的密度函数为 $\varphi(x)$，如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则此积分为 ξ 的**数学期望**，即

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

例 38 设随机变量 ξ 服从均匀分布，其密度函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求数学期望 $E(\xi)$.

解

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{x}{b-a}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}(a+b),$$

即 ξ 的期望值在其取值范围的中央.

例 39 正态变量的密度函数为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

试求其数学期望 $E(\xi)$.

解

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\varphi(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+\mu)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t,$$

利用换元积分法可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=0.$$

而 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ 为 $N(0,1)$ 的密度函数，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=1,$$

故

$$E(\xi)=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$
$$=\mu.$$

即 ξ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其数学期望为 μ.

若 ξ 服从参数为 λ 的指数分布，则用同样的方法可以计算数学期望 $E(\xi)=\frac{1}{\lambda}$.

(3) 数学期望的性质

1) $E(C)=C$　(C 为常数);

2) $E(C\xi)=CE(\xi)$　(C 为常数);

3) $E(\xi_1+\xi_2)=E(\xi_1)+E(\xi_2)$.

例 40　试证随机变量 ξ 与期望值 $E\xi$ 的偏差的期望值为 0.

证　ξ 与 $E\xi$ 的偏差为 $\xi-E\xi$,因为 $E\xi$ 为常数,故 $E(E\xi)=E\xi$,所以

$$E(\xi-E\xi)=E\xi-E(E\xi)=E\xi-E\xi=0.$$

(4) 随机变量函数的数学期望

随机变量 ξ 的函数 $\eta=g(\xi)$亦为随机变量,要计算 $g(\xi)$的数学期望,只需知 ξ 的概率分布,具体方法如下:

1) 若 ξ 为离散型随机变量,概率分布为

ξ	x_1	x_2	…	x_i	…
P	p_1	p_2	…	p_i	…

则 $\eta=g(\xi)$的数学期望为

$$E\eta=\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i)p_i.$$

2) 若 ξ 为连续型随机变量,概率密度为 $\varphi(x)$,则 $\eta=g(x)$ 的数学期望为

$$E\eta=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

例 41　设 $\xi\sim N(0,1)$求 $E\xi^2$.

解

$$\begin{aligned}E\xi^2&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\\&=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\\&=0+1=1.\end{aligned}$$

9.7.2　随机变量的方差、标准差

随机变量的数学期望反映了其均值的大小,在许多实际问题中,只知道均值还不能反映事物的本质. 一个最简单的例子就是手表的日走时误差问题.

例 42　甲、乙两工厂生产的两种手表,它们的日走时误差(秒)分别为 ξ_1 和 ξ_2,相应的分布列为

$$\xi_1\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix},$$

$$\xi_2\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix},$$

试计算 $E\xi_1$ 和 $E\xi_2$，并考虑由此说明什么问题.

解 $E\xi_1=(-1)\times 0.1+0\times 0.8+1\times 0.1=0.$

同理 $E\xi_2=0.$

由此说明要从数学期望比较两个厂生产的手表的质量，无法得出结论.

为此，讨论 ξ 与 $E\xi$ 的偏差. 因为偏差有正负，讨论绝对值又不方便，且由例 40 知 $E(\xi-E\xi)=0$，没有实际意义，故讨论偏差平方的数学期望 $E(\xi-E\xi)^2$.

定义 3 设 ξ 是一个随机变量，若 $E(\xi-E\xi)^2$ 存在，则称其为 **ξ 的方差**(variance)，记为 $D(\xi)$，即

$$D(\xi)=E(\xi-E\xi)^2.$$

又称 $\sqrt{D\xi}$ **为 ξ 的标准差(均方差)**(standard deviation).

由定义 3 知，方差是偏差 $(\xi-E\xi)$ 的平方的数学期望，它是描述随机变量对其数学期望的离散程度的一个量. 方差小，说明随机变量所取的值密集在其数学期望左右；方差大，说明随机变量所取的值与其数学期望偏离较大，比较分散.

方差的具体计算的方法如下：

(a) 对离散型随机变量 ξ

$$D\xi=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-E\xi)^2P(\xi=x_k);$$

(b) 对连续型随机变量 ξ，若密度函数为 $\varphi(x)$

$$D\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E\xi)^2\varphi(x)\mathrm{d}x;$$

(c) 由方差的定义及数学期望的性质推出的计算公式

$$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2.$$

例 43 计算例 42 中 $D\xi_1$ 和 $D\xi_2$，并说明由此得出什么结论.

解

$$\begin{aligned} D\xi_1&=E\xi_1^2-0\\ &=(-1)^2\times 0.1+0^2\times 0.8+1^2\times 0.1=0.2,\\ D\xi_2&=E\xi_2^2-0\\ &=(-2)^2\times 0.1+(-1)^2\times 0.2+0^2\times 0.4\\ &\quad+1^2\times 0.2+2^2\times 0.1\\ &=1.2. \end{aligned}$$

显然 $D\xi_1<D\xi_2$，说明甲厂生产的手表日走时误差接近 0，从走时准确性分析手表的质量较好.

例 44 求泊松分布的方差.

解 泊松分布 $P(\xi=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\quad\begin{pmatrix}\lambda>0\\ k=0,1,2,\cdots\end{pmatrix},$

$$
\begin{aligned}
E\xi &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda, \\
E\xi^2 &= E[(\xi-1)\xi] + E\xi \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \lambda \\
&= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{k-2} e^{-\lambda} + \lambda \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda.
\end{aligned}
$$

故

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

例 45　设 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ 求 $D\xi$ 和标准差 $\sqrt{D\xi}$.

解　由本节例 39 知 $E\xi = \mu$,

$$
\begin{aligned}
D\xi &= E[\xi - E\xi]^2 \\
&= E[\xi - \mu]^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&\overset{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=\!=\!=} \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\
&\overset{例 41}{=\!=} \sigma^2.
\end{aligned}
$$

标准差 $\sqrt{D\xi} = \sigma$.

读者可自行计算:

若 ξ 服从伯努利分布 $B(n,p)$,则 $D\xi = np(1-p)$;

若 ξ 服从均匀分布 $U[a,b]$,则 $D\xi = \frac{1}{12}(b-a)^2$;

若 ξ 服从参数为 λ 的指数分布,则

$$D\xi = \frac{1}{\lambda^2}.$$

利用方差的定义及数学期望的性质可得**方差的性质**:

(a) 设 C 为常数,$\xi = C$,则 $D\xi = 0$;

(b) $D(C\xi) = C^2 D(\xi)$,其中 C 为常数;

(c) 若 ξ 与 η 相互独立,则 $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$.

例 46 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 相互独立，有相同的方差 $D(\xi_i)=\sigma^2$，求 $\xi=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ 的方差.

解

$$\begin{aligned} D(\xi) &= D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right] \\ &= \frac{1}{n^2}D\left[\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D[\xi_i] \\ &= \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

该例说明一个随机变量 ξ，为减少偏差，将 ξ 重复取值 n 次，记这 n 次的观测值为 $x_1,x_2\cdots,x_n$，这 n 次的均值对应的随机变量 $\bar{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，其方差为 ξ 的方差的 $\frac{1}{n}$ 倍，即 $\bar{\xi}$ 关于其数学期望的偏差程度小得多.

数学期望和方差是反映随机变量特性的两个重要的数字特征，统计学中经常用到，读者可记住这些结果，以便应用.

思考题

1. 为什么定义数学期望时需要 $\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k$ 绝对收敛这一条件？

2. 随机变量 ξ 的数学期望是否一定存在？考察柯西分布

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

3. 试证 $D\xi=E(\xi^2)-(E\xi)^2$.

4. 某地区进行疾病 D 普查，需检验每个人的血液，若先将 k 个人分成一组，如果检验结果阴性，表明受试者全为阴性，如果检验结果阳性，再逐个检查，试问这种方法能否减少检查次数？

思考题解答

1. 随机变量 ξ 的取值 x_k 的顺序是可以随便改变的，数学期望的定义中应该允许改变 x_k 的顺序而不影响其收敛性及其和值，这在数学上相当于要求级数绝对收敛.

2. 由数学期望定义，必须积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x$$

绝对收敛.

本题中，由于积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x=2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{\pi(1+x^2)}$$

$$=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_0^{+\infty}$$

$$=+\infty,$$

表明柯西分布的数学期望不存在.

以上结果表明对任意随机变量，它的数学期望不是一定存在的.

3. 证明

$$\begin{aligned}D\xi&=E(\xi-E\xi)^2\\&=E[\xi^2-2\xi E\xi+(E\xi)^2]\\&=E\xi^2-2E\xi E\xi+(E\xi)^2\\&=E\xi^2-(E\xi)^2.\end{aligned}$$

4. 设受试者检验结果为阳性的概率为 p，则阴性的概率为 $q=1-p$，一般来说各人检验的结果是相互独立的，k 个人都为阴性的概率为 q^k，其中有人阳性的概率为 $1-q^k$.

设 ξ 为每个人所需检验的次数，显然，当 k 个人都为阴性，平均每人检查 $\frac{1}{k}$ 次，当 k 个人中有阳性，则必须每人再检查一次，平均每人检查 $1+\frac{1}{k}$ 次，故 ξ 的分布列为

$$\xi:\begin{bmatrix}\frac{1}{k} & 1+\frac{1}{k}\\ q^k & 1-q^k\end{bmatrix},$$

由此可知，每个人平均所需检查的次数为

$$E\xi=\frac{1}{k}q^k+\left(1+\frac{1}{k}\right)(1-q^k)$$

$$=1-q^k+\frac{1}{k}.$$

如果逐个检查每人平均检验 1 次. 故当

$$1-q^k+\frac{1}{k}<1\quad 即\quad q>\frac{1}{\sqrt[k]{k}}$$

时，用分组的办法能减少检验次数. 另外，若已知 q，则可由 $E\xi=1-q^k+\frac{1}{k}$ 选取最合适的整数 k_0，使得 $E\xi$ 达到最小值.

习　题　9

1. 指出下列各题中哪些成立，哪些不成立？

(1) $\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

(2) $A-B=A\,\overline{B}$；

(3) $(AB)(A\,\overline{B})=V$（不可能事件）；

(4) $\overline{A}B=B$.

2. 有 A,B,C,D 4 个事件，试写出下列事件的逆事件：

(1) A,B,C,D 至少有一个发生；

(2) A,B,C,D 至少有两个发生.

3. 设 A,B,C 为 3 个随机事件，且

$$AB=V,BC=V.$$

试问：AC 是否为不可能事件，请举例说明.

4. 有 30 只小白鼠，其中有 6 只做过某种药物试验，现任取 5 只，求其中有 2 只做过药物试验的概率.

5. 从 52 张扑克牌中抽取 4 张，抽得 A,K,Q,J 的概率是多少？抽得同花的 A,K,Q,J 的概率又是多少？

6. 任取一个正整数，求该数的平方的末位数是 1 的概率.

7. 设 A,B,C 3 个事件，有

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},$$

$$P(AB)=P(BC)=0,\quad P(AC)=\frac{1}{8}.$$

求：(1) A,B,C 至少有一个发生的概率；

(2) 只有 A 发生的概率；

(3) 只有 A,B 两者发生的概率.

8. 假如某城市中患甲病的概率 $P(A)=0.3\%$，患乙病的概率 $P(B)=4\%$，从人群中任抽查一人，问此人

(1) 既患甲病又患乙病的概率为多少？

(2) 至少患其中一种病的概率为多少？

9. 设 $P(A)=a,P(B)=b$，若 A、B 互不相容，求：

(1) $P(A+B)$；

(2) $P(AB)$；

(3) $P(A+\overline{B})$；

(4) $P(B/\overline{A})$；

(5) $P(\overline{A}/B)$.

10. 有 6 个元件串联，每个元件出故障的概率为 $P_1=0.3$，$P_2=P_3=0.2$，$P_4=P_5=0.1$，$P_6=0.4$. 求：

(1) 线路出故障的概率；

(2) 若元件并联，线路出故障的概率.

11. 袋中有质地、大小相同的蓝、白、红 3 种色的球各 1 个，有放回地抽 3 次. 求：

(1) 3 次颜色相同的概率；

(2) 3 次都为红色的概率.

12. 某项调查表明年龄大于 60 岁的 1 万人中，有 4000 人经常吸烟，其中又有 1800 人肺功能严重紊乱，不吸烟者中 1500 人肺功能严重紊乱. 问：吸烟与肺功能严重紊乱两事件是否相互独立？

13. 设事件 A,B 相互独立，且 $P(A)>\frac{1}{2}$，$P(B)>\frac{1}{2}$，试证 A 与 B 不可能互不相容.

14. 设男人(A)患色盲(B)的概率为 0.05，女人患色盲的概率为 0.0025(男女人口 1∶1)，用下列两种方法计算人类患色盲病的概率，哪种方法错误，错在哪里？

(1) $P(B)=P(AB+\overline{A}B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=0.05+0.0025$
$=0.0525$；

(2) $P(B)=P(AB+\overline{A}B)=P(AB)+P(\overline{A}B)$
$=P(A)\cdot P(B/A)+P(\overline{A})\cdot P(B/\overline{A})$
$=\frac{1}{2}\times 0.05+\frac{1}{2}\times 0.0025$
$=0.02625$.

15. 两名工人加工同一种零件，如果甲的废品率为 0.03，乙的废品率为 0.02，甲加工 2000 个，乙加工 1000 个，这些零件放在一起检验. 如果任抽出一件，它是次品的概率为多少？已知某零件是次品，它是乙加工的可能性为多少？

16. 一名 B 型血型的女性，其配偶为 O 型血型，所生子女为 O 型的概率 $P(O/O)=0.25$，配偶为 A 型，子女为 O 型的概率 $P(O/A)=0.0625$，配偶为 B 型，子女为 O 型的概率 $P(O/B)=0.0625$，配偶为 AB 型，子女为 O 型的概率 $P(O/AB)=0$. 设人群中 O 型：36%，A 型：28%，B 型：28%，AB 型：8%. 如果已知该女性生一 O 型孩子，问：

(1) 某 AB 型男性，是否可能是孩子的亲生父亲？

(2) 孩子的亲生父亲血型是否一定为 O 型？为什么？

17. 某产品的合格率为 80%，用简易方法将合格品判为正品的概率为 0.95，将不合格品判为正品的概率为 0.10，求用简易方法判为合格品的准确率为多少？

18. 对一批动物做药物毒性试验，如果有毒性反应的可能性为 30%，问 10 只动物中有 3 只有毒性反应的概率为多少？

19. 某种器械使用 1000 次以上损坏的概率为 0.2，那么 3 件器械使用 1000 次

以后最多只有一个损坏的概率为多少？

20. 给青蛙每单位体重注射一定剂量的洋地黄，根据经验其致死的概率为0.6，今给2只青蛙注射，求死亡只数的概率分布(分布律).

21. 从一副扑克牌中抽出5张，求其中红桃张数的概率分布.

22. 设随机变量 ξ 的概率密度为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{C}{\sqrt{1-x^2}}, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求：(1) 常数 C；

(2) ξ 落在区间 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 内的概率.

23. 设 $\Phi(x)$ 为标准正态分布 $N(0,1)$ 的分布函数，随机变量 ξ 服从 $N(\mu,\sigma^2)$，试证：

$$P(a<\xi<b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

24. 设 $\xi\sim N(1,0.6^2)$，试用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示 $P(\xi>0)$ 和 $P(0.2<\xi<1.8)$(提示：利用上题结果).

25. 试作出标准正态分布概率密度函数的草图，由此能估计 $N(\mu,\sigma^2)$ 的密度函数的图形吗？

26. 设随机变量 ξ 的分布律为

$$P(\xi=k)=\frac{a}{N},k=1,2,\cdots,N,$$

试确定常数 a.

27. 设 ξ 服从泊松分布，且已知

$$P(\xi=1)=P(\xi=2),$$

求 $P(\xi=4)$.

28. 设随机变量 ξ 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

求 ξ 的数学期望和方差.

29. 设随机变量 ξ 的分布律为

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0.4 & 0.3 & 0.3\end{pmatrix},$$

求 $E\xi$ 和 $D\xi$.

30. 设 ξ 的概率密度为

$$\varphi(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x<0,\\ 1-x, & 0\leqslant x<1.\end{cases}$$

求 $E\xi$ 和 $D\xi$.

习题 9 答案

1. (1)(2)(3)成立，(4)不成立.
2. (1) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$；

   (2) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}\,B\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}\,C\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D$.
3. 不一定.
4. 0.2130.
5. $4^4/C_{52}^4$，$4/C_{52}^4$.
6. 0.2.
7. (1) $\frac{5}{8}$；(2) $\frac{9}{64}$；(3) $\frac{3}{64}$.
8. (1) 0.00012；　(2) 0.04288.
9. (1) $a+b$；(2) 0；(3) $1-b$；(4) $\frac{b}{1-a}$；(5) 1.
10. 0.782，　0.000048.
11. $\frac{1}{9}$，　$\frac{1}{27}$.
12. 相互不独立.
13. 略.
14. (1)错，“男色盲的概率”与“男人中患色盲的概率”两个概念不同，后者表示条件概率.
15. 0.0267，　0.25.
16. (1) AB 型男性为孩子亲父的概率为 0；

    (2) 孩子亲生父亲的血型为 O 型的概率为 0.72.
17. 0.924.
18. 0.27.
19. 0.104.
20. $\xi:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.16 & 0.48 & 0.36 \end{pmatrix}$.
21. $P(\xi=k)=C_{13}^{k}C_{39}^{5-k}/C_{52}^{5}$　　$(k=0、1、2、3、4、5)$.
22. $\frac{1}{\pi}$，　$\frac{1}{3}$.
23. 略.
24. $\phi(\frac{10}{6})$，$2\phi(\frac{4}{3})-1$.
25. 略.
26. 1.

27. $\frac{2}{3e^2}$.

28. 1, 1.

29. -0.1, 0.69.

30. 0, $\frac{1}{6}$.

第 10 章

线性代数初步

医学科研及管理中的数学模型大部分可以近似地用线性方程组来描述．它是**线性代数**（linear algebra）研究的主要对象，所用的理论工具是矩阵代数．矩阵代数是学习医学统计、生物物理、模糊数学、计算机应用、现代管理学、运筹学、最优化理论、数学建模等课程不可缺少的工具．

10.1 行　列　式

10.1.1 行列式的定义

定义 1 设有 n^2 个实数，排成的 n 行 n 列的正方表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 ***n* 阶行列式**（n-order determinant）．

它的值是一个实数．如何求出这个实数，将在 10.1.3 节中讨论．

10.1.2 行列式的性质

为书写方便，下面以三阶行列式为例来讨论行列式的性质．

性质 1 行列互换，其值相等．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 2 两行（列）交换，其值反号．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$$

性质 3 某行（列）各元素乘以 k（$\neq 0$），其值也乘以 k.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 4 两行（列）相等，其值为零.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

推论 两行（列）成比例，其值亦为零.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{21} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{31} \end{vmatrix} = 0$$

性质 5 某行（列）各元素全为零，其值为零.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

性质 6 某行（列）的各元素是两项之和，则这个行列式可表示为两个行列式之和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_1 & a_{22}+b_2 & a_{23}+b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 7 某行（列）的各元素同乘以数 k 对应地加到另一行（列）上去，其值不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{11} & a_{32}+ka_{12} & a_{33}+ka_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

10.1.3 行列式的计算

(1) 二阶行列式用对角线法计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

(2) n 阶行列式的计算

定理 1　n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

可以按第 i 行（$i=1$，2，…，n）展开为

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

或按第 j 列（$j=1$，2，…，n）展开为

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj},$$

其中（A_{ij}）称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**（Cofactor）. 例如

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

即在 D 中划掉 a_{21} 处的行（第 2 行）和列（第 1 列）得到的一个子行列式，再乘以符号 $(-1)^{2+1}$.

例 1　用定理 1 展开三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

解　按第一列展开（用 [m] 表示第 m 列）：

$$D \overset{[1]}{=} a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

按第二行展开（用（m）表示第m行）：

$$D \overset{(2)}{=} a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

从上例看出，只要确定第一元素（a_{11}或a_{21}）的代数余子式的符号，后面就按正负相间的法则往下写就行了.

按二阶行列式的计算方法，不难算出：

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

例 2 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \overset{[1]}{=} 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

$= 2(-8-4)-(-4-3)-(4-6)$

$=-15.$

从定理 1 可以看出，若用行列式的性质，把某行（列）的大多数元素化为零，可以使计算变得简单.

例 3 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \overset{(2)+(3)}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} -3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

$=-3(8-3)=-15.$

从定理 1 还可以看出，若能将行列式对角线下方（或上方）的元素全部化为零，此时行列式的值等于对角线上诸元素的乘积.

例 4 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \overset{[2]+[1]}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} \overset{-1(1)+(2)}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

$\overset{-1(2)+(3)}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 3 \times 1 \times (-5) = -15.$

例 5
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[-3(1)+(3)]{\substack{(1)+(4)\\ -1(1)+(2)}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[-1(2)+(4)]{3(2)+(3)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) \times 7 \times 7 = -49.$$

定理 2　n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，当 $k \neq i$ 时有

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = 0.$$

证　把 D 中第 i 行中的元素换成第 k 行的元素，因为 $k \neq i$，所以构造的行列式 D_1 中有两行相同，由性质 4 知 $D_1 = 0$.

注意到行列式 D_1 的第 i 行的代数余子式 A_{ij} ($j=1$，2，…，n) 就是 D 的第 i 行的代数余子式 A_{ij} ($j=1$，2，…，n)，把 D_1 按第 i 行展开，得

$$D_1 = a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in}.$$

而 $D_1 = 0$，故当 $k \neq i$ 时有

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = 0.$$

10.2　矩　　阵

10.2.1　矩阵的概念

定义 2　由 $m \times n$ 个实数按一定次序排成的有 m 行 n 列的数表

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 **$m \times n$ 矩阵** (matrix)，这 $m \times n$ 个数叫做矩阵 A 的元素，a_{ij}叫做矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素，A 的维数为 $m \times n$，矩阵 A 可简记为

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}.$$

当 $m=1$ 时，$A = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}]$，称为**行矩阵** (row matrix) 或行向量；当 $n=1$ 时，

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

称为**列矩阵** (column matrix) 或**列向量**.

$m \times n$ 矩阵可以看成是由 m 个行向量组成，亦可以看成是由 n 个列向量组成.

元素全为 0 的矩阵称为**零矩阵** (zero matrix)，记为 **0**.

如果 $A = [a_{ij}]$ 和 $B = [b_{ij}]$ 都是 $m \times n$ 矩阵，且满足

$$a_{ij} = b_{ij} (i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n),$$

则称矩阵 A 与矩阵 B **相等**，记为 $A = B$.

$n \times n$ 矩阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 称为 **n 阶** (order) 方阵，简记为 $[a_{ij}]_n$.

在 n 阶方阵 $[a_{ij}]_n$ 中由左上角向右下角所引出的对角线称为**主对角线** (main diagonal)，a_{ii} ($i=1, 2, \cdots, n$) 称为 n 阶方阵 $[a_{ij}]_n$ 的对角线元素.

对角线元素都是 1，其余元素全为 0 的 n 阶方阵称为 **n 阶单位矩阵** (unitary matrix)，记为 ***In***，简记为 ***I***. 如

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

除对角线元素外，其余元素全为 0 的方阵称为**对角矩阵** (diagonal matrix). 如

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

形如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad 与 \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的方阵分别称为**上三角形矩阵**和**下三角形矩阵**，统称为**阶梯形矩阵**.

例 6 写出方阵

$$A=\begin{bmatrix}3&3&3\\6&6&6\\9&9&9\end{bmatrix}$$

的单位矩阵、对角矩阵和阶梯形矩阵.

解　A 的单位矩阵、对角矩阵和阶梯形矩阵分别是

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}3&0&0\\0&6&0\\0&0&9\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}3&3&3\\0&6&6\\0&0&9\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}3&0&0\\6&6&0\\9&9&9\end{bmatrix}.$$

10.2.2　矩阵的加法与数乘

定义 3　设 $A=[a_{ij}]$，$B=[b_{ij}]$ 同为 $m\times n$ 矩阵，则矩阵 A 与 B 的和记为 $A+B$. 计算方法是各对应元素相加，即

$$A+B=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&\cdots&a_{1n}+b_{1n}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&\cdots&a_{2n}+b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}+b_{m1}&a_{m2}+b_{m2}&\cdots&a_{mn}+b_{mn}\end{bmatrix}.$$

定义 4　一个实数 k（$\neq 0$）与矩阵 A 的数乘记为 kA. 计算方法如下：

$$k\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ka_{11}&ka_{12}&&ka_{1n}\\ka_{21}&ka_{22}&\cdots&ka_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ka_{m1}&ka_{m2}&\cdots&ka_{mn}\end{bmatrix}.$$

例 7

$$3\begin{bmatrix}1&1\\-2&2\\1&1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}2&0\\1&-1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3\\-6&6\\3&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4&0\\-2&2\\0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&3\\-8&8\\3&1\end{bmatrix}.$$

矩阵的加法与数乘满足以下性质：

(a) 交换律　$A+B=B+A$；

(b) 结合律　$(A+B)+C=A+(B+C)$，
　　　　　$k(\lambda A)=(k\lambda)A$；

(c) 分配律　$k(A+B)=kA+kB$，
　　　　　$(k+\lambda)A=kA+\lambda A$；

(d) 零　元　$0+A=A, A+(-A)=0$

(e) 单位元　$I\cdot A=A$.

10.2.3　矩阵的乘法

定义 5　设 $A=[a_{ij}]$是 $m\times l$ 矩阵，$B=[b_{jk}]$是 $l\times n$ 矩阵，则矩阵 A 与 B 的乘

积 $C=[C_{ik}]$是 $m\times n$ 矩阵. 其中

$$C_{ik}=\sum_{j=1}^{l}a_{ij}\cdot b_{jk}\quad (i=1,2,\cdots,m;k=1,2,\cdots,n).$$

从定义 5 可知,只有当矩阵 A 的列数与矩阵 B 的行数相同时才能相乘.

例 8

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3&1\\2&2\\1&3\end{bmatrix},\text{求 } AB \text{ 和 } BA.$$

解

$$AB=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\2&2\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&14\\14&10\end{bmatrix};$$

$$BA=\begin{bmatrix}3&1\\2&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&8&10\\8&8&8\\10&8&6\end{bmatrix}.$$

可见 $AB\neq BA$,这说明矩阵乘法不满足交换律.

例 9

$$\begin{bmatrix}1&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}.$$

例 9 说明两个非零矩阵的乘积可以是零矩阵.

例 10

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&2&2&4\\4&6&8&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}25\\10\\10\\0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}40\\0\\10\\5\end{bmatrix},$$

$$AB=AC=\begin{bmatrix}55\\40\\240\end{bmatrix}.$$

例 10 说明不能从 $AB=AC$ 中消去 A 而得到 $B=C$.

例 8 到例 10 说明矩阵乘法和实数乘法是不同的,不可将实数乘法法则随便用到矩阵乘法中.

矩阵乘法满足分配律和结合律:

(a) $A(B+C)=AB+AC$;

(b) $(A+B)C=AC+BC$;

(c) $(kA)B=A(kB)=k(AB)$;

(d) $(A_{mk}B_{ks})C_{sn}=A_{mk}(B_{ks}C_{sn})$.

10.2.4 转置矩阵与正交矩阵

定义 6　把 $m\times n$ 矩阵

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}$$

的行与列互换,可得到 $n\times m$ 矩阵

$$A^{\mathrm{T}}=[a_{ji}]_{n\times m}.$$

A^{T} 称为 A 的**转置矩阵**(transposed matrix).

转置矩阵有如下性质:

1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$;

2) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$;

3) $(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$;

4) $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

例 11　已知

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -4\end{bmatrix},$$

验证　　$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

证　$$AB=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 6\\ 2 & -8\end{bmatrix},$$

$$(AB)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 6 & -8\end{bmatrix},$$

$$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 6 & -8\end{bmatrix}=(AB)^{\mathrm{T}}.$$

定义 7　设 $A=[a_{ij}]_n$ 为 n 阶方阵,如果有

$$AA^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}A=I,$$

则称 A 为**正交矩阵**.

可以验证

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

均是**正交矩阵**.

正交矩阵有如下重要性质:

性质　设 A 为正交矩阵,则 A 中每一行(列)的 n 个元素的平方和等于 1;不同行(列)对应元素的乘积和等于 0,即

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}=\begin{cases}1, & i=j\text{ 时};\\ 0, & i\neq j\text{ 时}.\end{cases}$$

证　设 A 为 n 阶正交矩阵,即

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

由定义 7 知 $AA^{\mathrm{T}}=I$,即

$$AA^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

于是有 $a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2=1 \quad (i=1,2,\cdots,n)$,

$a_{i1}a_{j1}+a_{i2}a_{j2}+\cdots+a_{in}a_{jn}=0(i\neq j,i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$.

例如,对于正交矩阵

$$A=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

有 $\cos^2\theta+(-\sin\theta)^2=1$; $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$; $\cos\theta\sin\theta+(-\sin\theta)\cos\theta=0$.

10.2.5 矩阵的初等变换

矩阵的**初等变换**(elementary transformions)可以简化矩阵的形式. 初等变换分为初等行变换和初等列变换. 矩阵的初等变换有以下三种:

1) 互换矩阵的两行(列);

2) 以常数 $k\neq 0$ 乘矩阵的某一行(列)中的所有元素;

3) 把矩阵某一行(列)的所有元素 k 倍后加到另一行(列)的对应元素上.

对于任意的矩阵 A,对其施行初等变换,均可化为以下标准型之一:

$$\begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} I \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

其中 I 表示单位矩阵,$\mathbf{0}$ 表示 $\mathbf{0}$ 矩阵.

例如,若矩阵 A 可以化为 $[I \quad \mathbf{0}]$ 型,其演算过程是先用初等行变换把 A 化为 $[I \quad C]$ 型. 再用初等列变换把 $[I \quad C]$ 化为 $[I \quad \mathbf{0}]$ 型.

例 12 用初等行变换化矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

为 $[I \quad C]$ 的形式.

解

$$A \xrightarrow[-3(1)+(3)]{-2(1)+(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & -2 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1(2)+(3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}(3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1(3)+(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2(2)+(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-1(3)+(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = [I \quad C].$$

例 13　用初等列变换把例 12 中的$[I \quad C]$化为标准型$[I \quad \mathbf{0}]$.

解

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1[1]+[4]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2[3]+[4]]{-1[2]+[4]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [I \quad \mathbf{0}].$$

10.2.6　矩阵的秩

定义 8　在 $m\times n$ 矩阵 A 中，任意 k 行 k 列$\{k\leqslant\min(m,n)\}$的交点处的元素构成的 k 阶行列式，叫做矩阵 A 的 **k 阶子式**.

例如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \text{则 } |4|, \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

分别是 A 的一阶、二阶、三阶子式.

$m\times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k \cdot C_n^k$ 个.

定义 9　在 $m\times n$ 矩阵 A 中，存在一个 r 阶子式 $D\neq 0$，且所有大于 r 阶的子式全等于零，则称矩阵 A 的**秩**(rank)为 r，记作 $\mathrm{R}(A)=r$.

例 14　求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

的秩.

解 A 的三阶子式有 4 个，可以算出它们都等于零. 但存在二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$，所以 A 的秩是 2，即 $R(A)=2$.

利用定义 9 来计算矩阵的秩是很麻烦的. 可利用 10.2.5 节中的初等行变换化矩阵 A 为上阶梯形矩阵，然后再求秩.

例 15 求例 14 中矩阵 A 的秩.

解

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3(1)+(3)]{-2(1)+(2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3(2)+(3)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

存在二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$，所以 A 的秩是 2，即 $R(A)=2$.

10.2.7 方阵的逆阵

定义 10 方阵 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij}(10.1.3)组成的方阵

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

叫做 A 的**伴随矩阵**(conjugate transposed matrix).

例 16 求方阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

的伴随矩阵 A^*.

解

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

故

$$A^* = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

定义 11　设 A 是 n 阶方阵，I 是 n 阶单位矩阵，如果存在一个 n 阶方阵 B，使 $AB=BA=I$，则称 A 的逆阵存在，B 叫做 A 的**逆阵**(inverse matrix)，记作 A^{-1}，满足 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

定义 11 中的 A^{-1}是逆阵的记号，不能理解为 $A^{-1}=1/A$. 若 A^{-1}存在，则称 A 是**正则矩阵**(orthogonal matrix).

例 17　验证

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

是例 16 中 A 的逆阵.

证

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

定义 12　由 n 阶方阵 A 的元素构成的行列式称为方阵 A 的行列式，记为 $|A|$，或 Det A.

例 18　求例 16 中的方阵 A 的 $|A|$.

解

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{-1[1]+[3]} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2.$$

定义 13　对于 n 阶方阵 A，若 $|A|\neq 0$，则称 A 为非奇异矩阵；若 $|A|=0$，则称 A 为奇异(singular)矩阵.

定理 3　n 阶方阵 A 的逆阵存在的充要条件是 A 为非奇异矩阵，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*.$$

例 19　求例 16 中的方阵 A 的逆阵 A^{-1}.

解　据例 18 中的 $|A|=-2$ 及例 16 中的 A^* 可得

$$A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -1 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

当 n 较大时，用定理 3 求逆阵的工作量是相当大的. 下面介绍一种求逆阵的较简便的方法.

定理 4 对 n 阶方阵 A，构造 $n\times 2n$ 矩阵 $[AI]$，对它作初等行变换，当左半部矩阵 A 化为单位矩阵 I 时，则右半部矩阵 I 就同时化为 A^{-1}. 即

$$[AI]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[IA^{-1}].$$

例 20 求例 16 中的方阵 A 的逆阵 A^{-1}.

解

$$[AI]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[-2(1)+(3)]{-1(1)+(2)}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-1(2)+(3)}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{2}(3)}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-1(3)+(1)}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=[IA^{-1}].$$

故

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -1 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

10.3 线性方程组

10.3.1 线性方程组的概念

线性方程组(system of linear equations)反映自然与社会现象中变量间成比例变化的关系. 虽然自然与社会现象中变量间的关系大多数是非线性的，但在一定条件下，可以把它们简化为线性关系来研究.

一般线性方程组形式如下：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \tag{10.1}$$

其中 m,n 是自然数.

线性方程组(10.1)可以用矩阵表示如下：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{10.2}$$

简记为 $AX=B$. 若 $B=0$，称(10.1)或(10.2)为齐次线性方程组；若 $B\neq\mathbf{0}$，则称(10.1)或(10.2)为非齐次线性方程组.

10.3.2　用克莱姆(cramer)法则解线性方程组

如果线性方程组(10.1)中 $m=n$，则有

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{10.3}$$

记(10.3)的系数行列式为 D，

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

构造行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \cdots, D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix},$$

可以证明下面的定理成立.

定理 5　如果线性方程组(10.3)的系数行列式 $D\neq 0$，则方程组有惟一解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots,\quad x_n = \frac{D_n}{D}.$$

定理 5 称为克莱姆法则.

例 21 解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2 \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{-1(4)+(2)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(2)} 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{(1)+(3)} 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{[2]} 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 10.$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

故

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{4}{5}, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{9}{10}, x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{1}{2}, x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{3}{10}.$$

10.3.3 用矩阵的秩和行初等变换解线性方程组

对于线性方程组(10.2)，构造矩阵 $\overline{A}=[AB]$，即

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$

称 $m\times(n+1)$ 矩阵 $\overline{A}$ 为线性方程组 $AX=B$ 的**增广矩阵**.

定理 6 线性方程组 $AX=B$ 有解的充要条件是它的系数矩阵 A 与增广矩阵 $\overline{A}$ 同秩，即

$$\mathrm{R}(A) = \mathrm{R}(\overline{A}).$$

且 $\mathrm{R}(A)=n$ 时，$AX=B$ 有惟一解；$\mathrm{R}(A)<n$ 时，$AX=B$ 有无穷多解.

线性方程组 $AX=B$ 的解法如下：

(a) 用行初等变换化增广矩阵 A 为阶梯形；

(b) 用定理 6 判断 $AX=B$ 是否有解；

(c) 如果 $\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(\overline{A})=n$，将 $\overline{A}$ 化成 $[I\quad C]$ 型，写出 $AX=B$ 的解；

(d) 如果 $\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(\overline{A})=r<n$，则把 $\overline{A}$ 化成 $\begin{bmatrix} I & C \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ 型，设 $n-r$ 个自由未知量，写出通解.

例 22　用上面的方法求解例 21 中的线性方程组.

解

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-1(1)+(3) \\ -1(1)+(4)}]{-1(1)+(2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2(3)+(4)]{-2(3)+(2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)\leftrightarrow(4)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3(3)+(4)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -3 \end{bmatrix}.$$

$\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(\overline{A})=4$，线性方程组有惟一解. 下面将 $\overline{A}$ 化为 $[I\quad C]$ 型.

$$\xrightarrow[-\frac{1}{10}(4)]{-1(3)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{10} \end{bmatrix} \xrightarrow[-1(3)+(1)]{(2)+(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{3(4)+(2) \\ 5(4)+(3)}]{-4(4)+(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{9}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{10} \end{bmatrix}.$$

故

$$x_1=\frac{4}{5},x_2=\frac{9}{10},x_3=\frac{1}{2},x_4=\frac{3}{10}.$$

例 23 解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

解 为演算方便,将第四个方程与第一个方程交换,则有

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-1(1)+(3) \\ -3(1)+(4)}]{-2(1)+(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-1(2)+(4)]{-1(2)+(3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$R(A)=R(\overline{A})=2<4$,把 $\overline{A}$ 化为$\begin{bmatrix} I & C \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$型.

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2(2)+(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

设 x_3 和 x_4 是自由未知量,得线性方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{1}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4 \\ x_2 = \frac{3}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4. \end{cases}$$

例 24 解齐次线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 - x_5 = 0 \\ -5x_2 + 2x_3 + x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

解 将方程(1)和方程(2)交换,得

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & -7 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2(1)+(3)]{-3(1)+(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-1(2)+(4)]{-1(2)+(3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$R(A)=R(\overline{A})=2<5$，把 $\overline{A}$ 化为 $\begin{bmatrix} I & C \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ 型.

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2(2)+(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

设 x_3，x_4 和 x_5 是自由变量，得齐次线性方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 - \frac{1}{5}x_5 \\ x_2 = \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 - \frac{7}{5}x_5 \end{cases}$$

10.4　矩阵的特征值和特征向量

定义 14　设 $A=[a_{ij}]$ 是 $n\times n$ 方阵，I 是 $n\times n$ 单位矩阵，$X=[x_{j1}]$ 是 $n\times 1$ 矩阵，亦称为列向量. 若存在数 λ，使

$$AX = \lambda IX$$

成立，则称 λ 是方阵 A 的**特征值**(eigenvalue)，矩阵 X 称为方阵 A 的属于 λ 的**特征向量**(eigenvector)，简称方阵 A 的特征向量.

由 $AX=\lambda IX \Rightarrow (\lambda I-A)X=0$. 这是一个齐次线性方程组，它有非零解的充要条件是行列式 $|\lambda I-A|=0$.

求特征值和特征向量的步骤如下：

1）求出行列式 $|\lambda I-A|$ 的值；

2）从特征方程 $|\lambda I-A|=0$ 中解出特征值 λ；

3）把每一个特征值 λ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I-A)X=0$ 中，求出特征向量 X.

例 25 求方阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -3 & 3\\ 3 & 1 & 3 & -3\\ -3 & 3 & 1 & 3\\ 3 & -3 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

的特征值和特征向量.

解 (a) 求行列式$|\lambda I-A|$的值;

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -3 & 3 & -3\\ -3 & \lambda-1 & -3 & 3\\ 3 & -3 & \lambda-1 & -3\\ -3 & 3 & -3 & \lambda-1\end{vmatrix}\xlongequal[(2)+(3)]{\substack{(2)+(1)\\(3)+(4)}}\begin{vmatrix}\lambda-4 & \lambda-4 & 0 & 0\\ -3 & \lambda-1 & -3 & 3\\ 0 & \lambda-4 & \lambda-4 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-4 & \lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-4)^3\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ -3 & \lambda-1 & -3 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{3(1)+(2)}(\lambda-4)^3\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+2 & -3 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{[1]}(\lambda-4)^3\begin{vmatrix}\lambda+2 & -3 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{-1[3]+[2]}(\lambda-4)^3\begin{vmatrix}\lambda+2 & -6 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(3)}(\lambda-4)^3\begin{vmatrix}\lambda+2 & -6\\ 1 & 1\end{vmatrix}=(\lambda-4)^3(\lambda+8).$$

(b) 从特征方程$|\lambda I-A|=0$中解出特征值λ;

$$|\lambda I-A|=(\lambda-4)^3(\lambda+8)=0,$$

A的特征值为$\lambda_1=4,\lambda_2=-8$.

(c) 求属于特征值$\lambda_1=4$的特征向量,此时特征矩阵为

$$\lambda_1 I-A=\begin{bmatrix}3 & -3 & 3 & -3\\ -3 & 3 & -3 & 3\\ 3 & -3 & 3 & -3\\ -3 & 3 & -3 & 3\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xlongequal[-1(1)+(3)]{\substack{(1)+(2)\\(1)+(4)}}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

$R(\lambda_1 I-A)=1<4$,$(\lambda_1 I-A)X=0$有三个自由变量. 令$x_2=C_2,x_3=C_3,x_4=C_4$,则从$x_1-x_2+x_3-x_4=0$得$x_1=x_2-x_3+x_4=C_2-C_3+C_4$. 所以属于特征值$\lambda_1=4$的特征向量是

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 - C_3 + C_4 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix},$$

其中 C_2、C_3 和 C_4 为不全为零的任意常数.

下面求 A 属于特征值 $\lambda_2=-8$ 的特征向量,特征矩阵为

$$\lambda_2 I - A = \begin{bmatrix} -9 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -9 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -9 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -9 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(1)+(3)]{\substack{(1)+(2) \\ (3)+(4)}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-1(4)+(3)]{-1(2)+(3)} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(4)+(1)]{-3(2)+(1)} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)\leftrightarrow(4)]{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$R(\lambda_2 I-A)=3<4$,$(\lambda_2 I-A)X=0$ 有一个自由变量,令 $x_4=C$,从

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

得 $x_3=-x_4=-C$,$x_2=x_4=C$,$x_1=-x_2=-C$. 所以 A 属于特征值 $\lambda_2=-8$ 的特征向量是

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C \\ C \\ -C \\ C \end{bmatrix},$$

其中 C 是不为零的任意常数.

习 题 10

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \\ -4 & -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -7 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix}$.

2. 计算 n 阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

3. 设

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

证明 $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$.

4. 设

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

求 (1) $A+B$； (2) $A-B$； (3) $3A+2B-4C$；
(4) AB； (5) BA； (6) $(AB)C$；
(7) $A(BC)$； (8) A^T+B^T； (9) $(AB)^T$；
(10) B^TA^T.

5. 构造两个非零矩阵 A 和 B，使乘积 $AB=0$.

6. 用初等行变换把矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -4 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

化为 $[I\quad C]$ 型.

7. 计算矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1\\ 3 & 1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & -5 & 2 & 1 & -7\end{bmatrix}$$

的秩 R(A).

8. 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

的伴随矩阵 A^*.

9. 用两种方法求下列矩阵的逆矩阵

$$(1)\ A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{bmatrix},\quad (2)\ B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

10. 用 Cramer 法则解线性方程组

$$\begin{cases}3x-2y+2z=10\\ x+2y-3z=-1\\ 4x+y+2z=3\end{cases}$$

11. 用行初等变换解线性方程组

$$\begin{bmatrix}3 & -2 & 2\\ 1 & 2 & -3\\ 4 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ -1\\ 3\end{bmatrix}.$$

12. 解齐次线性方程组

$$\begin{cases}3x_1+10x_2+x_3+4x_4=0\\ x_1+3x_2-x_3+2x_4=0\\ -2x_1+5x_2+x_3-x_4=0\\ 3x_1-x_2+2x_3+x_4=0\\ -2x_1+15x_2-4x_3+4x_4=0\end{cases}$$

13. 求方阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

的特征值和特征向量.

14. 求方阵

$$A=\begin{bmatrix}5 & 7 & -5\\0 & 4 & -1\\2 & 8 & -3\end{bmatrix}$$

的特征值和特征向量.

习题 10 答案

1. (1) 35；　(2) -85；　(3) 0；　(4) $2a^3$.

2. $a^n+(-1)^{n+1}b^n$.

3. 略.

4. 略.

5. 略.

6.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

7. $R(A)=2$.

8.

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

9.

$$(1)\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix};\quad (2)\ B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

10. $x=2$，$y=-3$，$z=-1$.

11. $x=2$，$y=-3$，$z=-1$.

12.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{cases} x_1 = -\frac{7}{9}x_4 \\ x_2 = -\frac{2}{9}x_4 \\ x_3 = \frac{5}{9}x_4 \end{cases}$$

13. 特征值 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=5$；

特征向量

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-C_2 & -C_3\\C_2 & \\C_3 & \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C\\C\\C\end{bmatrix}.$$

14. 特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$；

特征向量

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2C\\C\\3C\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C\\C\\2C\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-C\\C\\C\end{bmatrix}.$$

附录 1　不定积分表

一、含有 $a+bx$ 的积分

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+bx}=\frac{1}{b}\ln|a+bx|+C$

(2) $\int (a+bx)^n=\frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}+C \qquad (n\neq -1)$

(3) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{a+bx}=\frac{1}{b^2}(a+bx-a\ln|a+bx|)+C$

(4) $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{a+bx}=\frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2-2a(a+bx)+a^2\ln|a+bx|\right]+C$

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(a+bx)}=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+bx}\right|+C$

(6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(a+bx)}=-\frac{1}{ax}+\frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right|+C$

(7) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(a+bx)^2}=\frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{a+bx}+\ln|a+bx|\right)+C$

(8) $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(a+bx)^2}=\frac{1}{b^3}\left(a+bx-2a\ln|a+bx|-\frac{a^2}{a+bx}\right)+C$

(9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(a+bx)^2}=\frac{1}{a(a+bx)}-\frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right|+C$

二、含有 $a\pm bx^2$ 的积分

(10) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+bx^2}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\sqrt{\frac{b}{a}}x+C(a>0,b>0)$

(11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a-bx^2}=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,x}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,x}+C$

(12) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{a+bx^2}=\frac{1}{2b}\ln(a+bx^2)+C$

(13) $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{a+bx^2}=\frac{x}{b}-\frac{a}{b}\int\frac{\mathrm{d}x}{a+bx^2}$

(14) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(a+bx^2)}=\frac{1}{2a}\ln\frac{x^2}{a+bx^2}+C$

(15) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(a+bx^2)}=-\frac{1}{ax}-\frac{b}{a}\int\frac{\mathrm{d}x}{a+bx^2}$

(16) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a+bx^2)^2}=\frac{x}{2a(a+bx^2)}+\frac{1}{2a}\int\frac{\mathrm{d}x}{a+bx^2}$

三、含有 $a+bx\pm cx^2$ 的积分

(17) $\displaystyle\int\frac{dx}{a+bx-cx^2}=\frac{1}{\sqrt{b^2+4ac}}\ln\frac{\sqrt{b^2+4ac}+2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}-2cx+b}+C$

(18) $\displaystyle\int\frac{dx}{a+bx+cx^2}=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\dfrac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C(b^2<4ac)\\[2ex]\dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\dfrac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}}+C(b^2>4ac)\end{cases}$

四、含有 $\sqrt{a+bx}$ 的积分

(19) $\displaystyle\int\sqrt{a+bx}\,dx=\frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3}+C$

(20) $\displaystyle\int x\sqrt{a+bx}\,dx=\frac{2(3bx-2a)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2}+C$

(21) $\displaystyle\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx=\frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3}+C$

(22) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2(bx-2a)\sqrt{a+bx}}{3b^2}+C$

(23) $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2(8a^2-4abx+3b^2x^2)\sqrt{a+bx}}{15b^3}+C$

(24) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln\dfrac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}+C & (a>0)\\[2ex]\dfrac{2}{\sqrt{-a}}\arctan\sqrt{\dfrac{a+bx}{-a}}+C & (a<0)\end{cases}$

(25) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}}=-\frac{\sqrt{a+bx}}{ax}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$

(26) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{a+bx}\,dx}{x}=2\sqrt{a+bx}+a\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$

五、含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ 的积分

(27) $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

(28) $\displaystyle\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}+C$

(29) $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C$

(30) $\displaystyle\int\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx=\frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C$

(31) $\displaystyle\int x\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx=-\frac{1}{5}\sqrt{(a^2-x^2)^5}+C$

(32) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

(33) $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$

(34) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin \frac{x}{a} + C$

(35) $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 - x^2}} + C$

(36) $\int \frac{x dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C$

(37) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x(a^2 - x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \arcsin \frac{x}{a} + C$

(38) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a + \sqrt{a^2 - x^2}}\right| + C$

(39) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C$

(40) $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right| + C$

(41) $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \arcsin \frac{x}{a} + C$

六、含有$\sqrt{x^2 \pm a^2}$的积分

(42) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

(43) $\int x\sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} + C$

(44) $\int x^2\sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{4}(x^2 \pm a^2)\sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{\pm a^2}{4}\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx$

(45) $\int \sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} dx = \frac{x}{8}(2x^2 \pm 5a^2)\sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

(46) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

(47) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$

(48) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

(49) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}} = \pm \frac{x}{a^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} + C$

(50) $\int \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} + C$

(51) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} + \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

(52) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}\right| + C$

(53) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x} + C$

(54) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2\pm a^2}} = \mp\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{a^2x} + C$

(55) $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+a^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right| + C$

(56) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x = \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x} + C$

(57) $\int \frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{x} + \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$

七、含有$\sqrt{a+bx\pm cx^2}$的积分($c>0$)

(58) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left|2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}\right| + C$

(59) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{C}}\arcsin\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C$

(60) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{c} - \frac{b}{2c}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx\pm cx^2}}$

(61) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = -\frac{\sqrt{a+bx-cx^2}}{c} + \frac{b}{2\sqrt{c^3}}\arcsin\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C$

(62) $\int \sqrt{a+bx+cx^2}\mathrm{d}x = \frac{2cx+b}{4c}\sqrt{a+bx+cx^2}$

$$-\frac{b^2-4ac}{8\sqrt{c^3}}\ln\left|2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}\right| + C$$

(63) $\int \sqrt{a+bx-cx^2}\mathrm{d}x - \frac{2cx-b}{4c}\sqrt{a+bx-cx^2}$

$$+\frac{b^2+4ac}{8\sqrt{c^3}}\arcsin\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C$$

八、含有三角函数的积分

(64) $\int \sin^2 ax\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}(ax - \sin ax\cos ax) + C$

(65) $\int \cos^2 ax\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}(ax + \sin ax\cos ax) + C$

(66) $\int \sin^n x\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\mathrm{d}x$

(67) $\int \cos^n x\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\mathrm{d}x$

(68) $\int \tan^n x\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x - \int\tan^{n-2}x\mathrm{d}x$

(69) $\int \cot^n x\mathrm{d}x = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1}x - \int \cot^{n-2}x\mathrm{d}x$

(70) $\int \sec^n x\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\tan x\sec^{n-2}x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x\mathrm{d}x$

(71) $\int \csc^n x\mathrm{d}x = -\frac{1}{n-1}\cot x\csc^{n-2}x + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2}x\mathrm{d}x$

(72) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$

(73) $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$

(74) $\int \sin ax\sin bx\mathrm{d}x = -\frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + C$

(75) $\int \cos ax\cos bx\mathrm{d}x = \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + C$

(76) $\int \sin ax\cos bx\mathrm{d}x = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C$

(77) $\int \sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x\cos^{n-2}x\mathrm{d}x$

$$= -\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2}x\cos^n x\mathrm{d}x$$

(78) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \tan\frac{x}{2} + C$

(79) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\cos x} = -\cot\frac{x}{2} + C$

(80) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x} = \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) + C \quad (a^2 > b^2)$

(81) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x} = \frac{1}{b-a}\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}}{\tan\frac{x}{2} - \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}}\right| + C \quad (a^2 < b^2)$

(82) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x} = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2}}\arctan\left[\sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2}}\left(\tan\frac{x}{2} + \frac{b}{a}\right)\right] + C \quad (a^2 > b^2)$

(83) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^2}{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2} + \frac{b}{a} - \sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2}}}{\tan\frac{x}{2} + \frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2}}}\right| + C \quad (a^2 < b^2)$

九、含有反三角函数的积分

(84) $\int \arcsin\frac{x}{a}\mathrm{d}x = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + C$

(85) $\int x\arcsin\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2} + C$

(86) $\int x^2\arcsin\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2} + C$

(87) $\int \arccos\frac{x}{a}dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C$

(88) $\int x\arccos\frac{x}{a}dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\arccos\frac{x}{a} - \frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2} + C$

(89) $\int x^2\arccos\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{3}\arccos\frac{x}{a} - \frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2} + C$

(90) $\int \arctan\frac{x}{a}dx = x\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2) + C$

(91) $\int x\arctan\frac{x}{a}dx = \frac{1}{2}(x^2+a^2)\arctan\frac{x}{a} - \frac{ax}{2} + C$

(92) $\int x^2\arctan\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{3}\arctan\frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2) + C$

十、含有指数函数、对数函数的积分

(93) $\int xe^{ax}dx = \frac{1}{a^2}e^{ax}(ax-1) + C$

(94) $\int x^2e^{ax}dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) + C$

(95) $\int x^ne^{ax}dx = \frac{1}{a}x^ne^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx$

(96) $\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C$

(97) $\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C$

(98) $\int (\ln x)^2dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$

(99) $\int (\ln x)^3dx = x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x + C$

(100) $\int (\ln x)^ndx = x(\ln x)^n - n\int(\ln x)^{n-1}dx$

(101) $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x| + C$

(102) $\int x^n\ln x dx = x^{n+1}\left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C$

(103) $\int x^m(\ln x)^ndx = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n - \frac{n}{m+1}\int x^m(\ln x)^{n-1}dx$

附录 2　拉普拉斯变换简表

	$f(t)$	$F(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3	t^m（m 为自然数）	$\frac{m!}{s^{m+1}}$
4	$t^m e^{at}$（m 为自然数）	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}$
5	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
6	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
7	$\mathrm{sh}\, at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
8	$\mathrm{ch}\, at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
9	$t\sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
10	$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s+a^2)^2}$
11	$e^{-bt}\sin at$	$\frac{a}{(s+b)^2+a^2}$
12	$e^{-bt}\cos at$	$\frac{s+b}{(s+b)^2+a^2}$
13	$e^{-bt}\sin(at+c)$	$\frac{(s+b)\sin c+a\cos c}{(s+b)^2+a^2}$
14	$\sin^2 t$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right)$
15	$\cos^2 t$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4}\right)$
16	$\sin at\sin bt$	$\frac{2abs}{[s^2+(a+b)^2][s^2+(a-b)^2]}$

续表

	$f(t)$	$F(s)$
17	$e^{at}-e^{bt}$	$\frac{a-b}{(s-a)(s-b)}$
18	$ae^{at}-be^{bt}$	$\frac{(a-b)s}{(s-a)(s-b)}$
19	$\frac{1}{a}\sin at-\frac{1}{b}\sin bt$	$\frac{b^2-a^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
20	$\cos at-\cos bt$	$\frac{(b^2-a^2)s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
21	$\frac{1}{a^2}(1-\cos at)$	$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$
22	$\frac{1}{a^3}(at-\sin at)$	$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$
23	$\frac{1}{a^4}(\cos at-1)+\frac{1}{2a^2}t^2$	$\frac{1}{s^3(s^2+a^2)}$
24	$\frac{1}{a^4}(\mathrm{ch}at-1)-\frac{1}{2a^2}t^2$	$\frac{1}{s^3(s^2-a^2)}$
25	$\frac{1}{2a^3}(\sin at-at\cos at)$	$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$
26	$\frac{t}{2a}\sin at$	$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$
27	$\frac{1}{2a}(\sin at+at\cos at)$	$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$
28	$\frac{1}{a^4}(1-\cos at)-\frac{1}{2a^3}t\sin at$	$\frac{1}{s(s^2+a^2)^2}$
29	$(1-at)e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$
30	$t\left(1-\frac{a}{2}t\right)e^{at}$	$\frac{s}{(s+a)^3}$
31	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
32	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
33	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}$
34	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$	$\frac{s}{(s-a)\sqrt{s-a}}$
35	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt}-e^{at})$	$\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$

附录 3 标准正态分布函数数值表

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76425	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84850	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92786	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900

附录 4　泊松分布数值表

$\sum_{k \leqslant x} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ 数值表

x \ λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
0	0.904837	0.818731	0.740318	0.670320	0.606531	0.548812	0.496585
1	0.995321	0.982477	0.963063	0.938448	0.909796	0.878099	0.844195
2	0.999845	0.998852	0.996390	0.992074	0.985612	0.977885	0.965858
3	0.999996	0.999943	0.999724	0.999224	0.998248	0.997642	0.994246
4	1.000000	0.999998	0.999974	0.999939	0.999928	0.999606	0.999214
5	1.000000	1.000000	0.999999	0.999996	0.999986	0.999962	0.999909
6	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999997	0.999990
7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999998
8							1.000000

x \ λ	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
0	0.449329	0.406570	0.367879	0.135335	0.049787	0.018361	0.006738
1	0.808792	0.772483	0.735759	0.406006	0.199148	0.091579	0.040428
2	0.852577	0.937144	0.919699	0.676677	0.423190	0.238105	0.124652
3	0.990920	0.988542	0.981012	0.857124	0.647232	0.433472	0.263026
4	0.998589	0.997657	0.996340	0.947348	0.815263	0.628839	0.440493
5	0.999816	0.999658	0.999406	0.983437	0.916082	0.785132	0.615961
6	0.999980	0.999958	0.999917	0.995467	0.966491	0.889326	0.762183
7	0.999999	0.999997	0.999990	0.998904	0.988095	0.948866	0.866628
8	1.000000	1.000000	0.999999	0.999763	0.996196	0.978636	0.931860
9			1.000000	0.999954	0.998897	0.991867	0.968172
10				0.999992	0.999707	0.997159	0.986205
11				0.999999	0.999928	0.999084	0.994547
12				1.000000	0.999983	0.999726	0.997931
13					0.999996	0.999923	0.999202
14					0.999999	0.999979	0.999774
15					1.000000	0.999994	0.999931
16						0.999998	0.999930
17						0.999999	0.999994
18						0.999999	0.999993
19						1.000000	0.999999
20							0.999999
21							1.000000

参 考 文 献

[1] 同济大学数学教研室主编.高等数学(上、下册)(第4版).北京:高等教育出版社,1996
[2] 青义学.医用高等数学.长沙:湖南科技出版社,1986
[3] 方积乾主编.微积分初步与生物医学应用.北京:北京医科大学出版社,1990
[4] 周怀梧.数理医药学.上海:上海科学技术出版社,1983
[5] 郭必贵主编.医药应用数学.北京:科学技术文献出版社重庆分社,1990
[6] 龚瑆.医用高等数学.北京:人民卫生出版社,1985
[7] 南京工学院数学教研组编.积分变换第3版. 北京:高等教育出版社,1989
[8] 罗泮祥主编.医用高等数学第2版. 北京:人民卫生出版社,1996
[9] 陆洪娣主编.医学高等数学.重庆:重庆大学出版社,1996
[10] 张惠安,赵廉编著.医用高等数学.长沙:湖南科技出版社,1996

[General Information]
□□=□□□□□□
□□=□□□□□
□□=357
SS□=11170590
DX□=
□□□□=2001□08□□1□
□□□=□□□□□